



Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

TESIS DOCTORAL

Ecuaciones constitutivas de materiales termoviscopoplásticos. Aplicación a un polímero de uso estructural.

Autor:

Sergio González López

Director:

José Antonio Loya Lorenzo

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS
CONTINUOS Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS

Leganés, junio de 2014

TESIS DOCTORAL

ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE
MATERIALES TERMOVISCOPLÁSTICOS.
APLICACIÓN A UN POLÍMERO
DE USO ESTRUCTURAL.

Autor: Sergio González López

Director: José Antonio Loya Lorenzo

TRIBUNAL CALIFICADOR

Presidente:

Secretario:

Vocal:

Calificación:

Leganés, junio de 2014

Agradecimientos

En primer lugar, debo agradecer al Profesor José Antonio Loya Lorenzo la predisposición e implicación que me ha demostrado en esta Tesis Doctoral a lo largo de estos años. Toda su ayuda, sus consejos y su enseñanza han sido claves para el desarrollo de este trabajo. También quiero agradecer al Profesor José Fernández Sáez, por todo su apoyo, cercanía y conocimientos que me ha aportado constantemente, y por la oportunidad que me dio de pertenecer a este Departamento.

A los Profesores Ramón Zaera, Guadalupe Vadillo y Jorge Zahr por facilitarme sus trabajos, y por ofrecerme su ayuda siempre que la he necesitado.

A los técnicos de laboratorio, David, Sergio y Pepe, por ayudarme y facilitarme los equipos y aconsejarme en muchos aspectos del trabajo experimental.

Al resto de compañeros del Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad Carlos III de Madrid, con los que he compartido todo este tiempo.

A Leticia, que me apoyas siempre y me motivas para conseguir mis objetivos, y a Álvaro, que desde que naciste veo todo de una forma más positiva.

A mis padres y a mi hermana, que me habéis acompañado y apoyado durante los buenos y los malos momentos todos estos años.

A mis amigos, por todo su apoyo.

Deseo agradecer al Ministerio de Ciencia e Innovación la financiación recibida a través del proyecto “Modelos de Comportamiento y Criterios de Fallo Aplicables al PMMA Sometido a Cargas Impulsivas” [DPI2011-23191], que ha sido fundamental para el desarrollo de la presente Tesis Doctoral.

Gran parte de los materiales presentan un comportamiento termoviscoplastico, existiendo numerosas aplicaciones en las que el estudio del efecto de la temperatura y de la velocidad de deformación es indispensable, justificando la necesidad de avanzar en su conocimiento y modelización. En esta Tesis Doctoral se presenta un modelo de plastificación para el estudio del comportamiento termoviscoplastico de polímeros, partiendo de otros recogidos en la literatura y considerando ecuaciones constitutivas adicionales.

Se ha desarrollado un algoritmo consistente para integrar implícitamente las ecuaciones constitutivas del modelo, que recoge las características fundamentales del comportamiento de estos materiales, como es la influencia de la velocidad de deformación, de la temperatura y del estado tensional a través de tres invariantes del tensor de tensiones, así como las posibles diferencias de comportamiento entre tracción y compresión presentes en los polímeros. El algoritmo se ha implementado mediante una subrutina de usuario de un código comercial de Elementos Finitos.

La verificación del modelo propuesto se ha realizado empleando un polímero de referencia (PMMA). Para ello, ha sido necesario realizar una campaña experimental que incluye ensayos de caracterización del material y diferentes ensayos que permiten estudiar la influencia de los distintos factores en su comportamiento. Concretamente, se han llevado a cabo ensayos de calibración de ciertos parámetros del modelo y, finalmente, ensayos de validación que permiten contrastar las predicciones numéricas con su correspondiente resultado experimental.

Abstract

Most materials presents thermo-viscoplastic behavior, existing several applications where the effects of temperature and strain rate are essential, so it is necessary to improve its knowledge and modelling. In this Ph.D. Thesis, it is developed a plasticity model to study the thermo-viscoplastic behavior of polymers, considering previous models included in the bibliography.

A consistent algorithm has been proposed to integrate implicitly the constitutive equations of the model, taking into account the effects of strain rate, temperature and stress state, considering three invariants of the stress tensor. Moreover, it incorporates the differences between the tensile and compressive behaviors. The algorithm has been implemented as a user's subroutine in a Finite Element commercial code.

The model has been verified using a specific polymer (PMMA). To do this, experimental tests have been carried out, including the characterization of the material, to study the influence of the parameters of the model. In particular, some parameters have been calibrated and, finally, the model has been validated comparing numerical with experimental results.

Indice

1. Introducción y objetivos	1
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	5
1.3. Aportaciones de la Tesis	6
1.4. Contenido de la Tesis	7
2. Ecuaciones constitutivas en polímeros	9
2.1. Representación del estado tensional de un sólido	10
2.2. Características termomecánicas generales de los polímeros	15
2.3. Modelos constitutivos en polímeros	22
2.3.1. Generalidades	22
2.3.2. Introducción del invariante I_1	24
2.3.3. Introducción del invariante J_3	31

2.3.4.	Conclusiones extraíbles	35
3.	Modelo constitutivo propuesto y su implementación numérica	39
3.1.	Introducción	40
3.2.	Ecuaciones constitutivas	41
3.3.	Integración consistente	47
3.3.1.	Introducción	47
3.3.2.	Esquema de resolución	50
3.3.3.	Discretización de las ecuaciones diferenciales	52
3.3.4.	Resolución del sistema de ecuaciones	57
3.3.5.	Definición del tensor tangente consistente	62
3.4.	Implementación en ABAQUS	74
4.	Procedimiento experimental	77
4.1.	Introducción	78
4.2.	Caracterización mecánica del PMMA	79
4.2.1.	Ensayos de tracción uniaxial	80
4.2.2.	Ensayos de compresión uniaxial	90
4.2.3.	Resumen de resultados	96
4.3.	Ensayos de compresión confinada	98

4.3.1.	Introducción	98
4.3.2.	Procedimiento experimental	100
4.3.3.	Tensión radial y deformación circunferencial en la probeta	104
4.3.4.	Caracterización del material del confinamiento . . .	107
4.3.5.	Resultados	108
4.4.	Ensayos de compresión-cortadura	111
4.4.1.	Introducción	111
4.4.2.	Procedimiento experimental	113
4.4.3.	Resultados	114
4.5.	Ensayos de validación global	116
4.5.1.	Introducción	116
4.5.2.	Procedimiento experimental	116
4.5.3.	Resultados	118
5.	Calibración y validación del modelo propuesto	121
5.1.	Introducción	122
5.2.	Determinación del valor del parámetro n	124
5.3.	Efecto del parámetro de Lode	133
5.3.1.	Comparación de resultados numéricos y experimentales	135

5.3.2.	Influencia del parámetro n en los ensayos de compresión-cortadura	140
5.4.	Validación global del modelo	141
5.4.1.	Modelo numérico	142
5.4.2.	Comparación de resultados numéricos y experimentales	144
5.4.3.	Influencia del espesor	148
6.	Conclusiones y trabajo futuro	155
6.1.	Conclusiones	156
6.2.	Trabajos futuros	158
	Bibliografía	159

Índice de figuras

1.1. Algunas aplicaciones industriales y biomédicas de los polímeros: (a) Tuberías, (b) Recipientes, (c) Componentes electrónicos, (d) Córnea artificial, (e) Material biomédico, (f) Prótesis dentales.	3
1.2. Aplicaciones de algunos polímeros frente a impacto.	3
2.1. Tensiones y direcciones principales de un elemento diferencial de volumen de un sólido.	12
2.2. Definición gráfica del plano π utilizado para el análisis tensional de un sólido.	12
2.3. Representación gráfica del estado tensional en un elemento diferencial de volumen genérico.	13
2.4. Definición gráfica del ángulo de Lode, θ	14
2.5. Comparativa entre las propiedades mecánicas de los principales grupos de materiales existentes [6].	16
2.6. Curvas tensión-deformación para el polímero Policarbonato (PC): (a) $T = 25^{\circ}C$, (b) $\dot{\epsilon} = 0,01 \text{ s}^{-1}$ [10].	19
2.7. Probeta utilizada por Mirone [54].	27
2.8. Probetas utilizadas por Castagnet et al. [55].	28

2.9. Dispositivo experimental utilizado en el trabajo de Rittel y Brill [56].	29
2.10. Probetas utilizadas por Driemeier et al. [62].	29
2.11. Probetas utilizadas por Boisot et al. [63].	30
2.12. Modelo numérico utilizado por Rittel et al. [71].	32
2.13. Probeta utilizada por Driemeier et al. [62].	33
2.14. Probetas SCS utilizadas por Ames et al. [72].	34
2.15. Probeta utilizada por Yin et al. [73].	34
3.1. Esquema del algoritmo de retorno utilizado.	51
3.2. Diagrama de flujo del algoritmo numérico implementado. .	75
4.1. Probeta normalizada (UNE-53-023-94).	81
4.2. Probeta utilizada en la caracterización a tracción del PMMA.	81
4.3. Estado de carga utilizado en la verificación del estado tensional en la probeta.	82
4.4. Estado tensional obtenido en Abaqus.	83
4.5. Útil auxiliar empleado en los ensayos de tracción del PMMA.	84
4.6. Curvas tensión-deformación a tracción obtenidas para el PMMA.	88
4.7. Variación de la tensión a tracción con la temperatura y con la velocidad de deformación, para una deformación de referencia de valor 0,02.	89

4.8. Probeta de compresión uniaxial, antes y después de un ensayo.	91
4.9. Curvas tensión-deformación a compresión obtenidas para el PMMA.	94
4.10. Variación de la tensión a compresión con la temperatura y la velocidad de deformación, para una deformación de referencia de valor 0,4.	96
4.11. Comparativa de las curvas tensión-deformación obtenidas a compresión y las mostradas por Nasraoui et al. [2]. . . .	98
4.12. Dispositivo experimental del ensayo de compresión confinada.	99
4.13. Esquema experimental de los ensayos de compresión confinada.	100
4.14. Probeta, confinamiento y tapas auxiliares utilizados.	100
4.15. Altura h de contacto entre la probeta y el confinamiento. .	102
4.16. (a) Esquema para la obtención de σ_{radial} en función de h y ϵ_{θ}^b ($E_{ref} = 200\text{ GPa}$, $\nu = 0,33$). (b) Distribución de ϵ_{θ}^b para $\sigma_{radial} = 800\text{ MPa}$ y $h = 15\text{ mm}$	105
4.17. Esquema acotado y fotografía de la probeta de tracción uniaxial utilizada para caracterizar experimentalmente el acero de alta resistencia de tipo 42CrMo4.	107
4.18. Variación de la tensión equivalente de Von Mises y de la presión hidrostática con la deformación axial ($T = 25^{\circ}\text{C}$). .	109
4.19. Variación de la tensión equivalente de Von Mises y de la presión hidrostática con la deformación axial ($T = 45^{\circ}\text{C}$). .	109

4.20. Variación de la tensión equivalente de Von Mises y de la presión hidrostática con la deformación axial ($T = 65^{\circ}C$). .	110
4.21. Variación de la tensión equivalente de Von Mises y de la presión hidrostática con la deformación axial ($T = 85^{\circ}C$). .	110
4.22. Tensión equivalente de Von Mises y presión hidrostática en función de la temperatura y de la velocidad del ensayo ($\epsilon_{axial} = 0,1$).	111
4.23. Probetas de tipo SCS utilizadas.	113
4.24. Probeta antes y después de un ensayo de compresión-cortadura.	114
4.25. Curvas fuerza-desplazamiento obtenidas en los ensayos de compresión-cortadura.	115
4.26. Evolución de la fuerza con la temperatura y la velocidad ($d = 2mm$).	115
4.27. Dimensiones de los tipos de probeta considerados en los ensayos de validación (espesores 10 y 20 mm).	117
4.28. Dispositivo experimental de los ensayos de Flexión en Tres Puntos en probetas con orificio circular pasante.	117
4.29. Curvas fuerza-desplazamiento experimentales correspondientes a los ensayos de Flexión en Tres Puntos.	119
4.30. Comparativa de las curvas fuerza-desplazamiento experimentales correspondientes a los ensayos de Flexión en Tres Puntos.	119
5.1. Condiciones de contorno y simetrías utilizadas en el modelo numérico.	125

5.2. Evolución de la presión hidrostática con la deformación axial, para $n = 1, 2, 3$, mostrando también la correspondiente experimental ($v = 2mm/min$, $T = 45^{\circ}C$).	126
5.3. Tensión equivalente frente a deformación axial, $v = 0,2mm/min$	127
5.4. Tensión equivalente frente a deformación axial, $v = 2mm/min$	128
5.5. Tensión equivalente frente a deformación axial, $v = 20mm/min$	129
5.6. Tensión equivalente frente a deformación axial, $v = 200mm/min$	131
5.7. Tensión equivalente frente a deformación axial, $45^{\circ}C$, $20mm/min$	132
5.8. Tensión equivalente frente a deformación axial, $25^{\circ}C$, $200mm/min$, $n = 1,85$	133
5.9. Condiciones de contorno del modelo numérico de los ensayos de compresión-cortadura.	134
5.10. Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para $T = 25^{\circ}C$	135
5.11. Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para $T = 45^{\circ}C$	136
5.12. Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para $T = 65^{\circ}C$	137
5.13. Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para $T = 85^{\circ}C$	138

5.14. Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para 200 mm/min , y temperaturas $25^{\circ}C$ y $45^{\circ}C$, con y sin calentamiento por deformación plástica	139
5.15. Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para 200 mm/min , y temperaturas $65^{\circ}C$ y $85^{\circ}C$, con y sin calentamiento por deformación plástica	140
5.16. Curvas fuerza-desplazamiento para $2mm/min$ y $45^{\circ}C$, considerando $n = 1,75$ y $n = 2,00$	141
5.17. Condiciones de contorno y mallado utilizados en las simulaciones de Flexión en Tres Puntos ($e = 20\ mm$).	142
5.18. Curvas fuerza-desplazamiento para la velocidad $0,02mm/min$	145
5.19. Curvas fuerza-desplazamiento para la velocidad $0,2mm/min$	146
5.20. Curvas fuerza-desplazamiento para la velocidad $2mm/min$	147
5.21. Variación de la presión hidrostática a lo largo del espesor: (a) $z = 0$, (b) $z = e/4$, (c) $z = e/2$	149
5.22. Distribución de tensiones según la dirección longitudinal, σ_x .	150
5.23. Distribución de tensiones según la dirección vertical, σ_y . . .	150
5.24. Distribución de tensiones según la dirección del espesor, σ_z .	151
5.25. Distribución de deformación plástica equivalente en la probeta, $e = 20mm$, $d = 3mm$	152
5.26. Distribución a lo largo del espesor, y en la zona de interés, de la deformación plástica equivalente normalizada.	153

Índice de tablas

2.1. Propiedades termomecánicas de los materiales poliméricos, metálicos y cerámicos más utilizados.	18
2.2. Parámetros correspondientes a diferentes modelos que siguen la expresión general dada por la ecuación 2.20.	36
4.1. Propiedades físicas y termomecánicas del PMMA.	80
4.2. Módulo de Young a tracción, expresado en GPa , obtenido para cada temperatura y velocidad de deformación.	90
4.3. Geometrías utilizadas en la caracterización de polímeros en compresión cuasiestática.	91
4.4. Módulo de Young a compresión, expresado en GPa , obtenido para cada temperatura y velocidad de deformación.	95
4.5. Comparativa de diferentes geometrías de probeta utilizadas por diversos autores en ensayos de compresión confinada.	101
4.6. Módulo de elasticidad del acero de alta resistencia 42CrMo4, expresado en GPa , en función de la temperatura y de la velocidad de deformación.	108
4.7. Valores de ξ y ψ en estados de tracción y compresión uniaxiales y cortadura pura.	112

4.8. Casos ensayados en Flexión en Tres Puntos ($T = 40^{\circ}C$). . 118

Capítulo 1

Introducción y objetivos

En este capítulo se presentan una introducción a la Tesis Doctoral y los objetivos marcados en la misma.

1.1. Motivación

El estudio clásico del comportamiento elastoplástico de los materiales empleados en ingeniería se basa en los trabajos de Tresca, Saint-Venant, Lévy y Bauschinger del siglo XIX, y de Prandtl, Von Mises y Reuss del siglo XX. En ellos, se introducen los conceptos de deformación irreversible, criterio de plastificación y endurecimiento por deformación, además de la forma incremental de las ecuaciones constitutivas de dicho comportamiento. El modelo más utilizado es el de plasticidad J_2 , donde la superficie de plastificación viene dada únicamente por el segundo invariante del tensor de tensiones desviador, J_2 , y que puede incluir efectos de la velocidad de deformación y de la temperatura.

Debido a sus propiedades, los polímeros han incrementado su utilización respecto a otros materiales, en aplicaciones para automoción, aeronaves civiles y militares, aplicaciones ópticas y biomédicas, aplicaciones estructurales (paneles, tuberías, etc.) y artículos deportivos, domésticos y de oficina. También se utilizan polímeros en la fabricación de productos de consumo e industriales, tales como recipientes para alimentos y bebidas, anuncios, vitrinas, artículos domésticos y textiles, lentes y productos electrónicos y eléctricos (Figura 1.1).

Este hecho refleja las ventajas que tienen los polímeros en función de sus características: resistencia a la corrosión y a productos químicos, buena relación entre su resistencia mecánica y su peso, baja conductividad eléctrica y térmica, reducción de ruido, facilidad de manufactura, y costo relativamente bajo, entre otras, destacando también en determinados polímeros su alta resistencia frente a impacto (Figura 1.2).

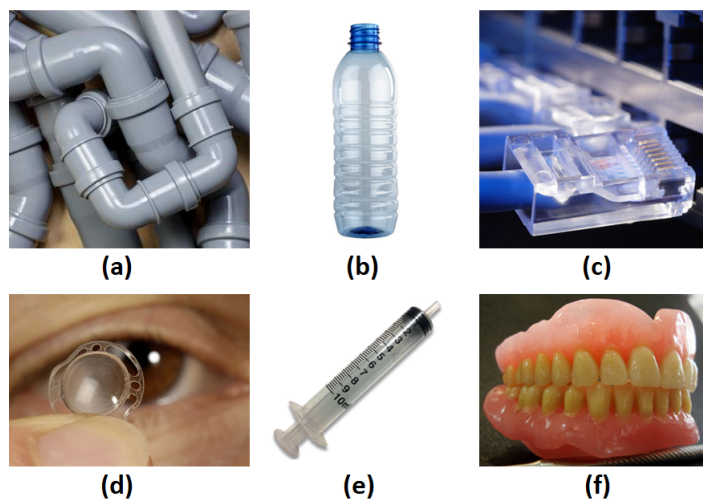


Figura 1.1: Algunas aplicaciones industriales y biomédicas de los polímeros: (a) Tuberías, (b) Recipientes, (c) Componentes electrónicos, (d) Córnea artificial, (e) Material biomédico, (f) Prótesis dentales.



Figura 1.2: Aplicaciones de algunos polímeros frente a impacto.

En los polímeros, el comportamiento elastoplástico no se puede describir únicamente con propiedades intrínsecas al material, sino que además puede depender del campo tensional inducido por las solicitaciones externas. Por ejemplo, en la mayoría de los materiales poliméricos, el comportamiento mecánico es dependiente de la triaxialidad y del parámetro de Lode, hecho que no ocurre en otros materiales, como algunos metales. Con el objeto de avanzar en el conocimiento del comportamiento mecánico de los polímeros, en esta tesis doctoral se ha desarrollado un modelo de comportamiento termoviscoplastico, que además de la velocidad de

deformación y de la temperatura, incluye el efecto de la triaxialidad y del parámetro de Lode, así como las diferencias que estos materiales presentan entre sus comportamientos a tracción y a compresión.

Se ha establecido un modelo de comportamiento basado en ecuaciones constitutivas, que supone una generalización de otros modelos de partida ya existentes en la literatura. El modelo se ha implementado numéricamente a través del Método de los Elementos Finitos, lo que ha permitido analizar la influencia de los parámetros del modelo en el comportamiento del material bajo diferentes niveles de triaxialidad, parámetro de Lode, velocidad de deformación y temperatura.

La viabilidad del procedimiento establecido se ha estudiado a través de un polímero concreto termoplástico y amorfo, el Polimetilmetacrilato (PM-MA), cuya estructura está compuesta por una cadena carbonatada en la que el sustituyente principal es un grupo funcional del tipo $COOCH_3$. Su estructura molecular es lineal, con bajos niveles de entrecruzamiento y de cristalinidad, características que hacen que su comportamiento se vea afectado de manera importante por la temperatura y la velocidad de deformación, incluso en el rango de velocidades de deformación bajas [1, 2].

Las predicciones obtenidas por el modelo numérico se han comparado con resultados experimentales, teniendo en consideración la influencia de los factores mencionados anteriormente (temperatura, velocidad de deformación, triaxialidad, etc.). Previamente, se ha caracterizado el material para conocer las relaciones constitutivas requeridas en el modelo matemático. Por otra parte, parámetros necesarios tales como el calor específico y el coeficiente de dilatación térmica, entre otros, han sido extraídos de la literatura.

Tratando de contribuir en esta dirección, esta Tesis se ha planteado alrededor de la modelización del comportamiento mecánico de los materiales poliméricos, bajo las características expuestas, y teniendo en consideración los factores anteriores. Se ha propuesto un modelo de comportamiento termoviscoplastico, se ha implementado numéricamente en un código de Elementos Finitos y, finalmente, se ha calibrado y validado para un polímero específico, el PMMA, contrastando resultados numéricos con sus correspondientes experimentales.

1.2. Objetivos

El principal objetivo de esta Tesis Doctoral es el desarrollo y la aplicación de un procedimiento que permita estudiar el comportamiento termoviscoplastico de materiales poliméricos, ya que su comportamiento se ve afectado por factores recogidos en modelos constitutivos complejos, como son la velocidad de deformación, la temperatura, la diferencia entre los comportamientos a tracción y a compresión, y tres invariantes representativos del estado tensional.

La metodología debe ser versátil, para poder resolver problemas con diferentes geometrías y condiciones de carga, y ser implementable en códigos de simulación numérica. Concretamente, un algoritmo de integración implícita será implementado en el programa comercial de Elementos Finitos ABAQUS [3]. El modelo será calibrado y validado experimentalmente para el polímero PMMA.

Para alcanzar el objetivo fundamental planteado, se han llevado a cabo las siguientes actividades:

- Estudio de modelos constitutivos de comportamiento de materiales poliméricos existentes en la literatura, destacando sus ventajas e inconvenientes y analizando su aplicabilidad en el contexto de la Mecánica de Medios Continuos.
- Formulación de un nuevo modelo constitutivo y la implementación numérica en un código comercial de Elementos Finitos de un método de integración implícita de sus ecuaciones.
- Comparación de resultados experimentales con su correspondiente predicción numérica. La calibración y validación del modelo constitutivo se ha realizado para el polímero PMMA, ya que es representativo del modelo planteado, al verse influenciado su comportamiento por todos los parámetros y variables remarcados anteriormente. Previamente, se ha caracterizado el material a tracción y a compresión.

1.3. Aportaciones de la Tesis

Las aportaciones originales de la presente Tesis Doctoral se recogen en los siguientes puntos:

- Se ha desarrollado un algoritmo implícito de integración consistente de las ecuaciones constitutivas del modelo de comportamiento propuesto, donde intervienen como parámetros más importantes la velocidad de deformación, la temperatura y tres invariantes representativos del estado tensional existente, así como las posibles diferencias entre los comportamientos a tracción y a compresión.
- Se ha obtenido una expresión exacta para el operador tangente consistente, también denominado Jacobiano, que reduce el coste compu-

tacional en la implementación del algoritmo.

- Se ha implementado el modelo, junto con el cálculo del operador tangente anterior, a través de una subrutina de usuario en el código comercial de Elementos Finitos ABAQUS.
- Se ha calibrado y validado el modelo para el polímero PMMA, contrastando resultados experimentales con sus correspondientes numéricos. Para ello, se han realizado distintos tipos de ensayo bajo diferentes condiciones de carga, velocidad de deformación y temperatura, con el fin de recoger la influencia de los distintos parámetros representativos del modelo.

1.4. Contenido de la Tesis

El presente capítulo constituye la introducción a esta Tesis Doctoral, donde se presenta una justificación de la misma y se describen los objetivos a alcanzar.

En el segundo capítulo se introduce el comportamiento mecánico de los polímeros, y se realiza un análisis bibliográfico que muestra los modelos que han sido utilizados para el estudio de su comportamiento. Previamente, se introduce el estado tensional de un sólido, y se recuerdan los invariantes más utilizados en un análisis tenso-deformacional general.

En el tercer capítulo se desarrolla el algoritmo numérico correspondiente al modelo de comportamiento propuesto en esta Tesis Doctoral, y se implementa en el código comercial de Elementos Finitos ABAQUS.

En el cuarto capítulo se describe el procedimiento experimental, que comprende ensayos a diferentes temperaturas y velocidades de deformación. Se incluyen ensayos de caracterización a tracción y a compresión del material de referencia utilizado, así como otros específicos que tienen como finalidad estudiar la influencia de la temperatura, la velocidad de deformación y distintos invariantes tensionales en el comportamiento del material.

En el quinto capítulo se reproducen numéricamente los ensayos realizados en el capítulo anterior, con la finalidad de calibrar ciertos parámetros del modelo y su posterior validación.

En el sexto capítulo se presentan las principales conclusiones extraídas, así como los posibles trabajos futuros que podrían derivarse del presente estudio.

Capítulo 2

Ecuaciones constitutivas en polímeros

En este capítulo se introduce el comportamiento mecánico de los polímeros, y se realiza un estudio bibliográfico que muestra los modelos que han sido utilizados para su estudio.

2.1. Representación del estado tensional de un sólido

En el presente apartado se introduce el estado tensional general en un sólido, con la finalidad de definir y justificar los invariantes tensionales que serán parte fundamental del modelo numérico que se tratará en capítulos posteriores. Con ello, se obtendrá el número mínimo de invariantes necesarios para caracterizar el estado tensional existente en un punto de un sólido general, y se definirán los más utilizados para este fin.

Sea $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones en un elemento diferencial de volumen de un sólido, y σ_1 , σ_2 y σ_3 sus tensiones principales. Los invariantes de $\boldsymbol{\sigma}$ vienen dados por:

$$I_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} \quad (2.1)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.2)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.3)$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor de tensiones unitario de orden 2, dado por $1_{ij} = \delta_{ij}$, siendo δ_{ij} la función delta de Kronecker.

Se define el tensor de tensiones desviador, \mathbf{s} , como:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{I_1}{3} \mathbf{1} \quad (2.4)$$

cuyos invariantes son:

$$J_1 = 0 \quad (2.5)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \quad (2.6)$$

$$J_3 = \det(\mathbf{s}) \quad (2.7)$$

La tensión equivalente de Von Mises y la tensión hidrostática se definen como:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} \quad (2.8)$$

$$\sigma_h = \frac{I_1}{3} \quad (2.9)$$

Considérese un elemento diferencial de volumen sujeto a un estado tensional general, y defínase el sistema de coordenadas dado por sus direcciones principales (Figura 2.1).

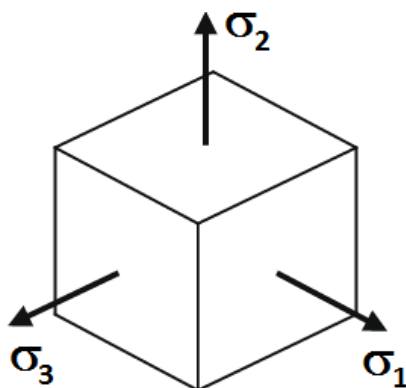


Figura 2.1: Tensiones y direcciones principales de un elemento diferencial de volumen de un sólido.

En el espacio anterior (Figura 2.2), se define un punto N tal que la recta dada por ON forma ángulos iguales con los ejes de coordenadas. El plano que pasa por el origen de coordenadas y es normal a la recta anterior se denomina plano π .

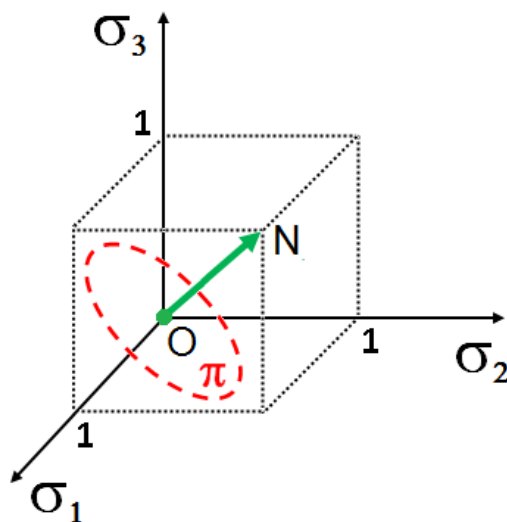


Figura 2.2: Definición gráfica del plano π utilizado para el análisis tensional de un sólido.

Se puede comprobar que cada punto de la recta ON representa un estado de tensión hidrostática pura, siendo la tensión hidrostática nula en los puntos contenidos en el plano π .

Considérese un estado tensional arbitrario dado por un punto P con com-

ponentes σ_1 , σ_2 y σ_3 (Figura 2.3). El vector \vec{OP} se puede descomponer en dos componentes, una perpendicular al plano π , \vec{a} , y otra paralela, \vec{r} .

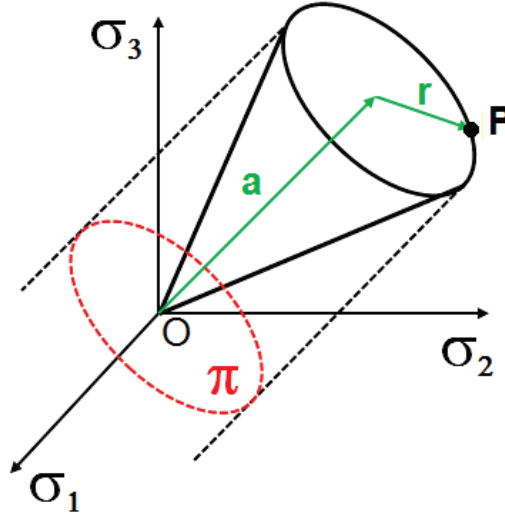


Figura 2.3: Representación gráfica del estado tensional en un elemento diferencial de volumen genérico.

Se puede verificar que:

$$a = \frac{\nabla}{3} \bar{\sigma}_h \quad (2.10)$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{3} \bar{\sigma}_{eq} \quad (2.11)$$

Adicionalmente, se define la triaxialidad, T , como el cociente entre la tensión hidrostática y la tensión equivalente de Von Mises:

$$T = \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}} \quad (2.12)$$

por tanto:

$$T = \frac{\nabla \bar{2} a}{3 r} \quad (2.13)$$

A la vista de la representación gráfica anterior, existen infinitos estados tensionales con la misma triaxialidad, dados por los puntos de la superficie de un cono de directriz ON .

Para obtener diferentes estados con la misma triaxialidad, se considerará la proyección del punto P en el plano π (Figura 2.4), observando que ésta es única para una triaxialidad dada.

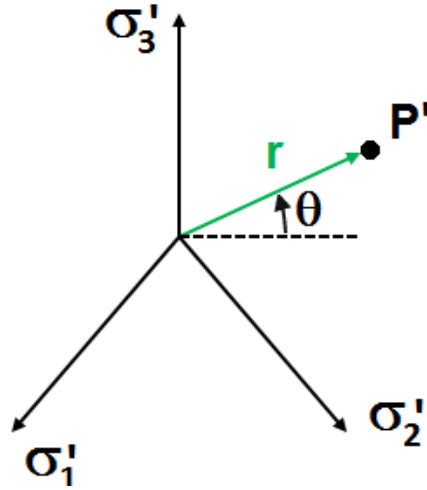


Figura 2.4: Definición gráfica del ángulo de Lode, θ .

La posición del punto P proyectado, P' , vendrá dada por la distancia al origen, r , y el ángulo que forma con la horizontal, θ . Se puede comprobar que θ , también denominado *ángulo de Lode*, viene dado por:

$$\tan \theta = \frac{2\sigma_3}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{(\sigma_2 + \sigma_1)} \quad (2.14)$$

o, equivalentemente:

$$\cos \left(3\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{9J_3}{2\sqrt{3}J_2^{3/2}} \leq \xi \quad (2.15)$$

siendo ξ el *parámetro de Lode*. Por tanto, queda demostrado que un estado tensional cualquiera viene determinado unívocamente por tres invariantes tensionales independientes entre sí, siendo las combinaciones más comunes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, (I_1, J_2, J_3) y (σ_{eq}, T, ξ) .

Las definiciones de triaxialidad y de parámetro de Lode se muestran, por ejemplo, en los estudios [4] y [5], donde se describen algunas de sus aplicaciones en el análisis del comportamiento mecánico de materiales.

2.2. Características termomecánicas generales de los polímeros

Los polímeros están formados por moléculas orgánicas con pesos moleculares desde 10^4 hasta 10^6 g/mol. Las propiedades más importantes, que hacen de los polímeros materiales de gran interés industrial, son:

- Baja densidad
- Elevada relación resistencia frente a peso
- Alta resistencia a la corrosión y a los productos químicos

- Baja conductividad térmica y eléctrica
- Facilidad de manufactura
- Coste relativamente bajo

Entre sus aplicaciones destacan la fabricación de piezas técnicas de la industria de la construcción, piezas y componentes aeronáuticos y de automoción, equipamiento biomédico y materiales aislantes en la industria eléctrica y electrónica, entre otras. En la Figura 2.5 se muestra una comparativa entre las principales familias de materiales, donde se representan la resistencia mecánica frente al coste, y el módulo de elasticidad frente a la densidad [6].

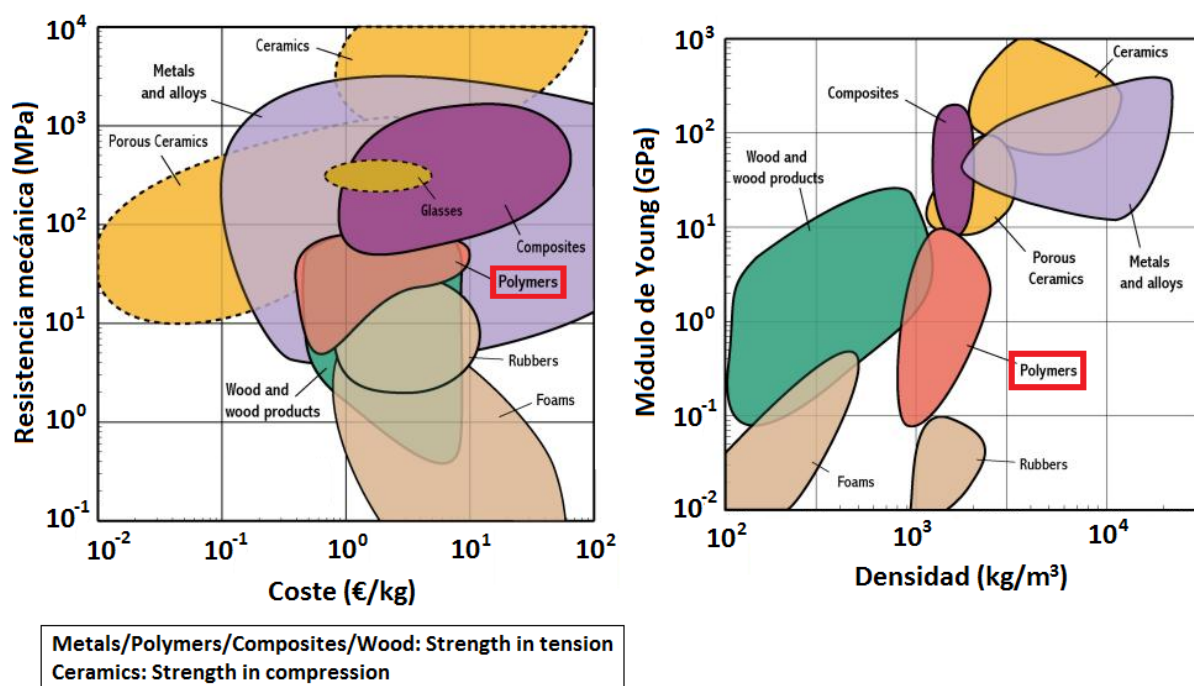


Figura 2.5: Comparativa entre las propiedades mecánicas de los principales grupos de materiales existentes [6].

Desde un punto de vista termomecánico, los polímeros se clasifican en termoplásticos, termoestables y elastómeros [7].

Los termoplásticos se componen de largas cadenas moleculares producidas al unir moléculas más pequeñas, y típicamente presentan un comportamiento elastoplástico relativamente dúctil, experimentando un ablandamiento si se aumenta su temperatura. Son aproximadamente dos órdenes de magnitud menos rígidos que los metales, y su resistencia mecánica es un orden de magnitud inferior. Destaca su alta sensibilidad a la velocidad de deformación y presentan una temperatura de transición vítrea, T_g , por encima de la cual muestran un comportamiento viscoso. El efecto de la temperatura en su resistencia y rigidez es similar a los metales, es decir, a mayor temperatura, éstas se reducen. Asimismo, se ablandan al aumentar la temperatura, recuperando sus propiedades originales al enfriarse.

Los polímeros termoestables están compuestos por cadenas de moléculas con fuertes enlaces cruzados entre ellas, para formar estructuras de redes tridimensionales. Generalmente, son más resistentes que los termoplásticos, aunque más frágiles. No poseen una temperatura de transición vítrea definida, y a diferencia de los termoplásticos, su resistencia y rigidez se ven menos afectadas por la temperatura y por la velocidad de deformación. En general, poseen mejores propiedades termomecánicas, sin embargo, si se incrementa lo suficiente la temperatura, se degradan de manera irreversible.

Los elastómeros tienen una estructura molecular intermedia a los anteriores, que presenta una ligera formación de enlaces cruzados entre las cadenas. Tienen la capacidad de sufrir grandes deformaciones elásticas sin apenas sufrir deformaciones irreversibles, y poseen una temperatura de transición vítrea relativamente baja.

Se observa que, en general, las características mecánicas de los polímeros son sensibles a la velocidad de deformación y a la temperatura. Su Módulo

de Young puede variar varios órdenes de magnitud dependiendo de sus características, mientras que en los materiales metálicos tradicionales los valores son mayores con un intervalo menor de variación. La resistencia mecánica de los polímeros es, como máximo, del orden de 100 MPa , mientras que la de algunas aleaciones metálicas puede llegar a valores cercanos a 1000 MPa [8, 9]. En la Tabla 2.1 se muestran los valores característicos de las propiedades termomecánicas más relevantes para los materiales poliméricos, metálicos y cerámicos más utilizados.

PROPIEDAD	Polímeros	Metales	Cerámicas
Densidad (kg/m^3)	1000-1500	2500-15000	2500-10000
Módulo de Young (GPa)	0.1-10.0	40-400	10-500
Resistencia a la tracción (MPa)	20-150	100-1000	150-400
Resistencia a la compresión (MPa)	50-500	100-500	1500-4000
Tenacidad de fractura ($MPa\ m^{1/2}$)	0.5-5.0	10-200	0.2-5.0
Conductividad térmica ($W/m^{\circ}C$)	0.2-0.5	10-400	10-100
Calor específico ($J/kg^{\circ}C$)	1000-2000	100-1000	1000-1500
Temp. máxima de utilización ($^{\circ}C$)	50-200	200-2000	1500-3000

Tabla 2.1: Propiedades termomecánicas de los materiales poliméricos, metálicos y cerámicos más utilizados.

Las características mecánicas de los materiales poliméricos son mucho más sensibles a las variaciones de temperatura y de velocidad de deformación que las de los metales. Generalmente, el aumento de la temperatura o la disminución de la velocidad de deformación producen una disminución de la resistencia mecánica y un aumento en la ductilidad del material (véanse, por ejemplo, [10-14]). En la Figura 2.6 se ilustra este comportamiento en el polímero Policarbonato (PC), mostrado en el trabajo de Richeton et al. [10].

Como han puesto de manifiesto diferentes autores, un aspecto relevante del comportamiento mecánico de la mayoría de los polímeros es su diferente respuesta en tracción y compresión, tanto en condiciones estáticas (Ward y Hadley, 1993 [15]), como dinámicas (Chen et al., 2002 [16]; Wu

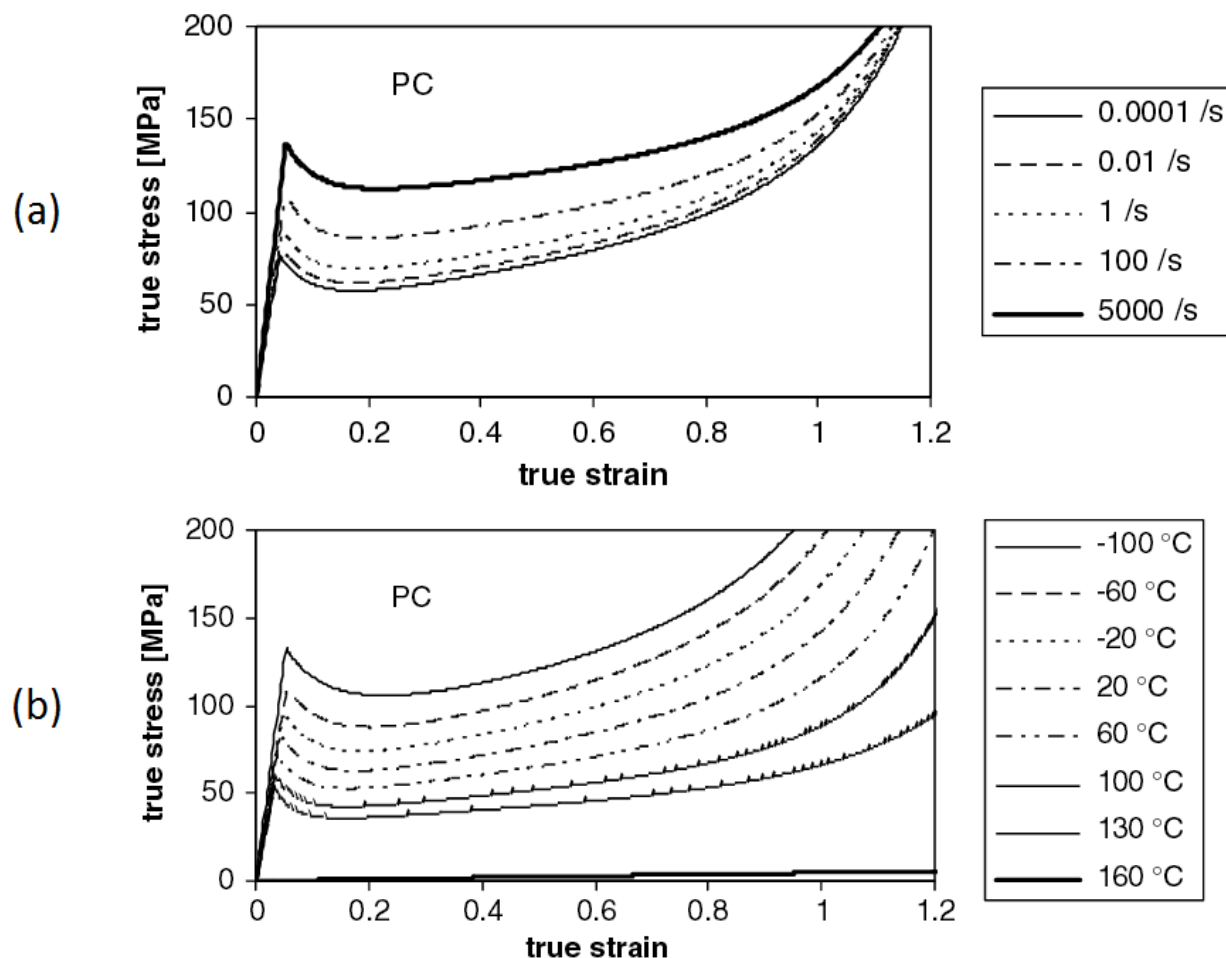


Figura 2.6: Curvas tensión-deformación para el polímero Policarbonato (PC): (a) $T = 25^\circ\text{C}$, (b) $\dot{\epsilon} = 0.01 \text{ s}^{-1}$ [10].

et al., 2004 [17]), siendo mayor la diferencia al aumentar la velocidad de deformación. La razón radica en la estructura molecular, que ofrece en general una mayor resistencia a rotura a compresión que a tracción [18-20]. La resistencia mecánica de los polímeros puede llegar a ser del orden de un 100 % mayor a compresión que a tracción, con una deformación de rotura a compresión que puede alcanzar valores de orden unidad en muchos casos, siendo prácticamente inapreciable a tracción. Este hecho será clave a la hora de establecer modelos de comportamiento mecánico aplicables a materiales poliméricos.

Los mecanismos de deformación contribuyen a controlar las características mecánicas de los materiales, en particular de los polímeros. La mayoría tienen una cristalinidad parcial, donde las regiones cristalinas están distribuidas dentro de las regiones amorfas. Esta distribución corresponde a una estructura de láminas cristalinas, separadas por material amorfo, que están interconectadas mediante cadenas de unión que lo cruzan. El mecanismo de deformación se describe en función de las interacciones de las láminas cristalinas con las regiones amorfas intermedias, como respuesta al esfuerzo aplicado, proceso que ocurre en varias etapas [8].

Las propiedades mecánicas de los polímeros se ven influenciadas también, en gran medida, por la magnitud de las fuerzas intermoleculares débiles. En las regiones cristalinas, donde las cadenas moleculares están empaquetadas y dispuestas ordenadamente, suelen encontrarse enlaces secundarios entre cadenas adyacentes. Estos enlaces secundarios son menos numerosos en las regiones amorfas, donde las cadenas están desalineadas, por tanto, un aumento en la cristalinidad mejora generalmente las propiedades mecánicas [8, 21].

El peso molecular es otra característica que influye de manera importante en su comportamiento mecánico, observando que en los polímeros de bajo peso molecular la resistencia mecánica aumenta al hacerlo éste, mientras que en los de mayor peso molecular es prácticamente independiente del mismo [9, 22]. Por ejemplo, el Polimetilmetacrilato presenta un peso molecular de valor $100,12 \text{ g/mol}$ y una resistencia mecánica a tracción del orden de 80 MPa (25°C), mientras que el Polietileno tiene un peso molecular de $28,05 \text{ g/mol}$ y una resistencia mecánica a tracción del orden de 15 MPa (25°C).

Puesto que las propiedades mecánicas de los polímeros son sensibles a la temperatura, es interesante analizar los factores que afectan a sus temperaturas de transición vítrea, T_g , y de fusión, T_f , ya que éstas van a determinar necesariamente una temperatura máxima de utilización del material [23]. La temperatura T_g se ve influenciada por su estructura molecular, ya que cuanto más rígida sea ésta la probabilidad de que experimente un movimiento de vibración cuando la temperatura aumenta es menor, y por tanto el valor de T_g es mayor. Asimismo, el nivel de entrecruzamiento molecular también afectará a T_g , aumentando la temperatura de transición vítrea al hacerlo éste [10, 21].

Desde el punto de vista de la modelización de su comportamiento termoviscoplastico, es importante remarcar que en la mayoría de los polímeros dicho comportamiento se ve altamente influenciado por el estado tensional presente en el material. Los estudios estructurales de la teoría clásica de la plasticidad se basan únicamente en el segundo invariante del tensor de tensiones desviador, J_2 , para describir la respuesta mecánica frente a sollicitaciones externas. Esta consideración ha obtenido buenos resultados en muchas aplicaciones de carácter ingenieril, y en la actualidad se siguen utilizando. Sin embargo, diversas investigaciones han demostrado que es insuficiente para el estudio de la mayoría de los polímeros (véase, por ejemplo, [18]), siendo necesaria la inclusión de invariantes tensionales adicionales.

Por otra parte, la diferencia de comportamientos entre tracción y compresión debe estar también representada en el modelo de comportamiento, hecho que no ocurre en los modelos clásicos basados únicamente en el invariante J_2 , como pueden ser los criterios de plastificación de Von Mises y de Tresca. También debe recogerse la sensibilidad de estos materiales a los cambios de temperatura y de velocidad de deformación.

A continuación, se presenta un análisis bibliográfico que justifica estas consideraciones, y que supone un punto de partida para la propuesta de un modelo de comportamiento termomecánico aplicable a polímeros.

2.3. Modelos constitutivos en polímeros

2.3.1. Generalidades

El continuo incremento en el uso de polímeros en aplicaciones de carácter ingenieril requiere un constante desarrollo de modelos constitutivos destinados a reproducir su comportamiento durante el proceso de fabricación o durante su vida en servicio. Son numerosos los estudios que han analizado experimentalmente el comportamiento de materiales poliméricos en estados de carga uniaxial o biaxial, sin embargo, no se conoce en profundidad su respuesta mecánica en casos más complejos de carga.

Modelos reológicos viscoplasticos, basados en la combinación de elementos analógicos de tipo resorte, amortiguador viscoso y elementos friccionales, fueron desarrollados con el objetivo de reproducir el comportamiento tensión-deformación en estados de carga uniaxial y en procesos de fluencia y relajación (Bardenhagen et al., 1997 [24]; Khan y Zhang, 2001 [25]). Estos modelos constitutivos anulaban los efectos viscosos en la respuesta volumétrica del material. Los autores observaron que se obtenían buenas predicciones tensodeformacionales únicamente en estados de carga a compresión, sin embargo, no reproducían adecuadamente procesos de descarga ni de relajación en el material. Para mejorar las predicciones, introdujeron en sus modelos nuevos elementos analógicos de comportamiento, obteniendo así mejores resultados en escalas de tiempo grandes,

a costa de incrementar el número de parámetros. Los nuevos modelos eran relativamente sencillos de aplicar, sin embargo, sus predicciones eran cualitativas, y no incluían el efecto que la tensión hidrostática tenía en el comportamiento.

Diversas investigaciones han centrado su estudio en comprender los mecanismos de deformación viscoplástica en polímeros cristalinos y amorfos (Galeski, 2003 [26]; Stachurski, 1997 [27]). En 1973, Argon [28] concluyó que el flujo plástico en polímeros cristalinos comienza cuando el nivel de carga supera la resistencia molecular a la rotación, encontrándose posteriormente una fase de ablandamiento del material. En 2001, Meyer y Pruitt [29] analizaron los mecanismos de deformación plástica en polímeros semicristalinos, concluyendo que el flujo plástico se inicia en la fase amorfa.

La mayoría de los análisis estructurales han utilizado la teoría clásica de la plasticidad, basada únicamente en el invariante J_2 , para describir la respuesta mecánica de aleaciones metálicas. Esta teoría asume que la tensión hidrostática y el parámetro de Lode no tienen influencia en el flujo plástico. A pesar de que la teoría J_2 clásica ha obtenido buenos resultados en muchas aplicaciones, se observó que no predecía satisfactoriamente el comportamiento de los geomateriales y de los polímeros, apareciendo por tanto la necesidad de incorporar la tensión hidrostática (ó en su lugar T) y el invariante J_3 (ó equivalentemente θ ó ξ) en sus modelos constitutivos de comportamiento (véanse, por ejemplo, [30-37]).

2.3.2. Introducción del invariante I_1

Las primeras investigaciones referentes a la influencia del estado tensional en el comportamiento de los materiales datan de 1923, y fueron desarrolladas por Ludwik y Scheu [38]. Los autores consideraron que la fractura de metales dúctiles estaba gobernada por su curva tensión-deformación, y afirmaron que ésta podía ser obtenida a través de ensayos de tracción en probetas cilíndricas con entallas de diferentes profundidades y radios de curvatura. Los trabajos de Orowan en 1945 [39] supusieron un punto de inflexión en el estudio de la física de los fenómenos de constricción plástica, en los que la triaxialidad es habitualmente utilizado para caracterizar dicho comportamiento. El trabajo experimental de Bridgman en 1952 mostró que la deformación de fallo en un ensayo de tracción uniaxial podía ser reducida si el ensayo se llevaba a cabo en condiciones de presión hidrostática, reduciendo por tanto el valor de la triaxialidad. Hancock y MacKenzie (1976) [40] y Hancock y Brown (1983) [41] también demostraron con posterioridad que la deformación que inicia la fractura dúctil decrece con la triaxialidad.

Basado en los resultados experimentales de Spitzig et al. (1975, 1976) [42, 43], referentes al comportamiento en tracción y compresión de algunas aleaciones metálicas de alta resistencia, Brunig (1999) [44] presentó una formulación de un criterio de plastificación basado en los invariantes I_1 y J_2 , para reproducir el efecto de la tensión hidrostática en el flujo plástico.

Existe un acuerdo generalizado, basado en observaciones experimentales, sobre el hecho de que la tensión hidrostática influye notablemente en el comportamiento de ciertos polímeros. Por consiguiente, los criterios de plastificación tradicionales como el de Von Mises y de Tresca, que han sido ampliamente utilizados en metales, dejan de tener validez para este

tipo de materiales.

A raíz de ello, históricamente se han desarrollado múltiples modelos que parten de los clásicos y que introducen, en diferentes variantes, el primer invariante del tensor de tensiones, I_1 , destacando el trabajo pionero de Holliday et al. [45] en 1964, y los trabajos de Mears et al. [46] en 1969 (véanse, por ejemplo, los trabajos [18, 47-51]).

Las investigaciones han concluido que los criterios clásicos de Von Mises y Tresca no reproducen adecuadamente el comportamiento termoviscoplastico de la mayoría de los polímeros, y han propuesto nuevos modelos que contrastan con experimentación, obteniendo resultados positivos pero limitados a determinados rangos de validez y bajo determinadas condiciones que restringen su utilización.

En este sentido, uno de los criterios de plastificación que mostraba explícitamente la influencia del primer invariante del tensor de tensiones fue el propuesto por Mohr Coulomb:

$$\tau_{oct} = \tau_0 + \frac{\mu}{3} I_1 \quad (2.16)$$

donde τ_{oct} es la tensión octaédrica, dada por $\tau_{oct} = (6J_2)^{1/2}/3$, y τ_0 y μ son constantes dependientes del material. Los límites de validez de este modelo fueron analizados por Bowden y Jukes en 1972 [52], proponiendo además un criterio alternativo basado en el criterio de Tresca:

$$\tau_{max} = \tau_0 + \frac{\mu}{3} I_1 \quad (2.17)$$

siendo τ_{max} la tensión tangencial máxima, dada por $\tau_{max} = \max(\sigma_i - \sigma_j)/2$. En ambos modelos, la clave radica en establecer una relación lineal entre $J_2^{1/2}$ e I_1 . Se analizó su validez en estados de carga uniaxial en diferentes polímeros, y concluyeron que reproducían aceptablemente, aunque con limitaciones, el comportamiento de estos materiales.

De entre los diferentes modelos que se han propuesto en la literatura, destacan los modelos de Drucker-Prager [30] de 1952 y de Raghava [53] de 1973, que han sido utilizados específicamente para algunos polímeros. El modelo de Drucker-Prager establece una relación lineal entre $J_2^{1/2}$ e I_1 (ecuación 2.18), y fue inicialmente formulado para analizar el comportamiento de suelos, siendo posteriormente aplicado a polímeros por Rittel y Brill [50]:

$$J_2^{1/2} + aI_1 + b = 0 \quad (2.18)$$

siendo a y b dependientes del cociente entre el límite elástico a compresión y a tracción. El modelo de Raghava, sin embargo, establece una relación lineal entre J_2 e I_1 , y fue aplicado a polímeros por Ghorbel [18]:

$$J_2 + cI_1 + d = 0 \quad (2.19)$$

donde c y d dependen, de nuevo, del cociente entre el límite elástico a

compresión y a tracción.

A continuación, se muestran investigaciones recientes de ámbito experimental donde se analiza la influencia de la triaxialidad en distintos materiales de interés ingenieril.

- En 2007, Mirone [54] analizó la influencia de la triaxialidad en el comportamiento mecánico de varios metales. En particular, estudió el comportamiento elastoplástico y el proceso de fractura dúctil en probetas de aluminio, cobre y acero. Llevó a cabo ensayos de tracción a diferentes velocidades de deformación cuasiestáticas hasta 1 s^{-1} , y las probetas que utilizó son las que se muestran en la Figura 2.7. Combinó distintos valores de R , d , D , L y L' , consiguiendo así distintos niveles de triaxialidad en la zona central de la probeta.

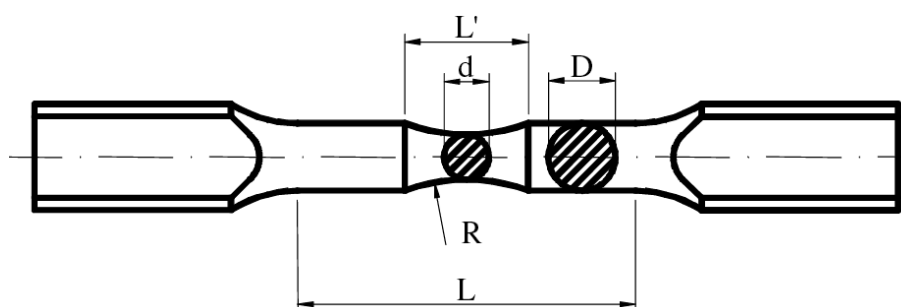


Figura 2.7: Probeta utilizada por Mirone [54].

- En 2007, Castagnet et al. [55] estudiaron la propagación de daño por nucleación de microvacíos en el seno de materiales poliméricos semicristalinos, considerando una posible influencia del nivel de triaxialidad macroscópica. Para ello, realizaron ensayos de tracción cuasiestáticos en probetas con las geometrías mostradas en la Figura 2.8, en el polímero α -PVDF, que cuenta con una temperatura de transición vítrea de -40°C y una temperatura de fusión de

170°C. Los ensayos realizados tuvieron en cuenta distintas temperaturas comprendidas entre ambos valores.

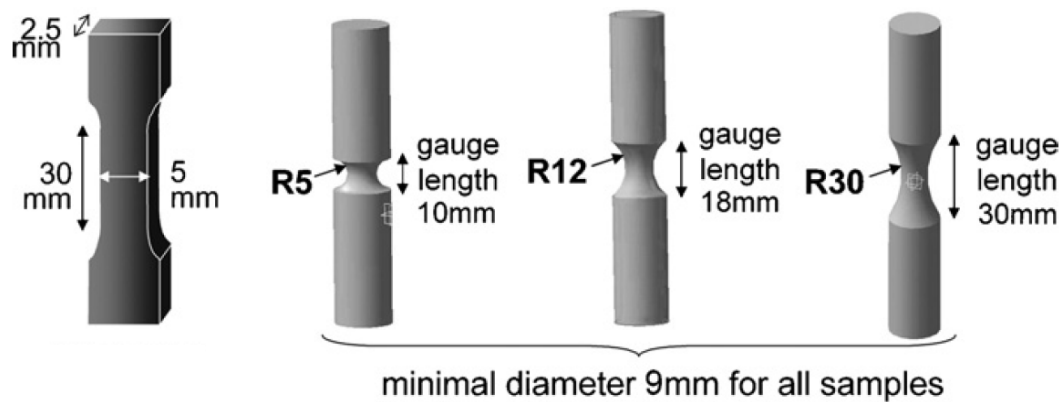


Figura 2.8: Probetas utilizadas por Castagnet et al. [55].

- En 2008, Rittel y Brill [56] analizaron los modos de fallo del PMMA mediante ensayos de compresión confinada. Su finalidad era caracterizar la sensibilidad a la presión hidrostática a temperatura ambiente, bajo un amplio rango de velocidades de deformación, comprendidas entre 10^{-3} y 10^4 s^{-1} . Los ensayos dinámicos se realizaron mediante un dispositivo de Barra Hopkinson [57, 58], siendo la configuración experimental la mostrada en la Figura 2.9.

Como confinamiento, Rittel y Brill utilizaron una aleación de aluminio 6061-T651, el cual sufría plastificación durante el ensayo, consiguiendo presiones hidrostáticas aproximadamente constantes durante el transcurso del mismo. Llegaron a registrar presiones hidrostáticas de hasta 200 MPa . Inicialmente, los ensayos de compresión confinada habían sido desarrollados con el fin de analizar el comportamiento mecánico de geomateriales como el hormigón o las rocas [59-61], que se ven sometidos, durante su vida en servicio, a altos niveles de presión hidrostática.

- En 2010, Driemeier et al. [62] analizaron el comportamiento mecánico de aleaciones de aluminio sometidas a diferentes niveles de triaxialidad. La finalidad del estudio era obtener relaciones constitutivas y

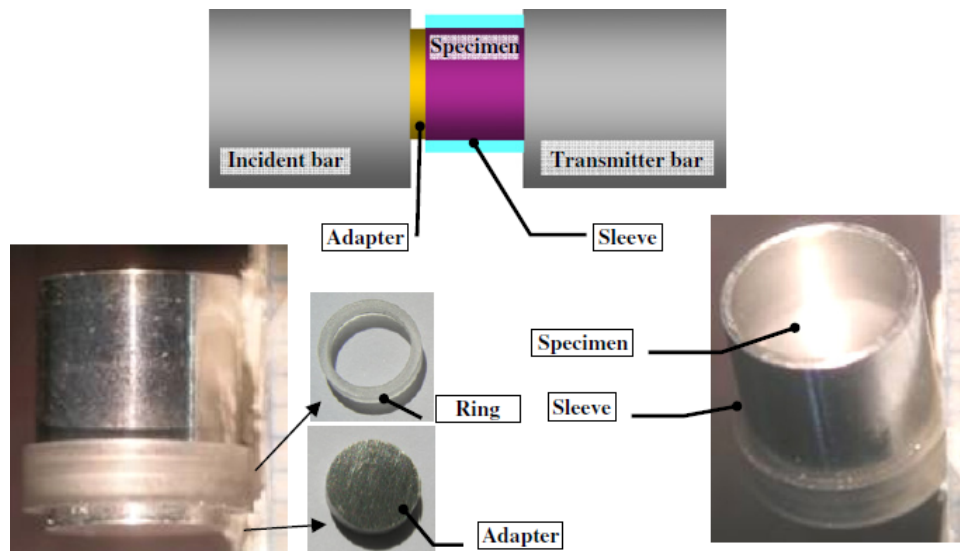


Figura 2.9: Dispositivo experimental utilizado en el trabajo de Rittel y Brill [56].

criterios de fallo dependientes de la triaxialidad. Para ello, realizaron ensayos cuasiestáticos de tracción en las geometrías de probeta mostradas en la Figura 2.10.

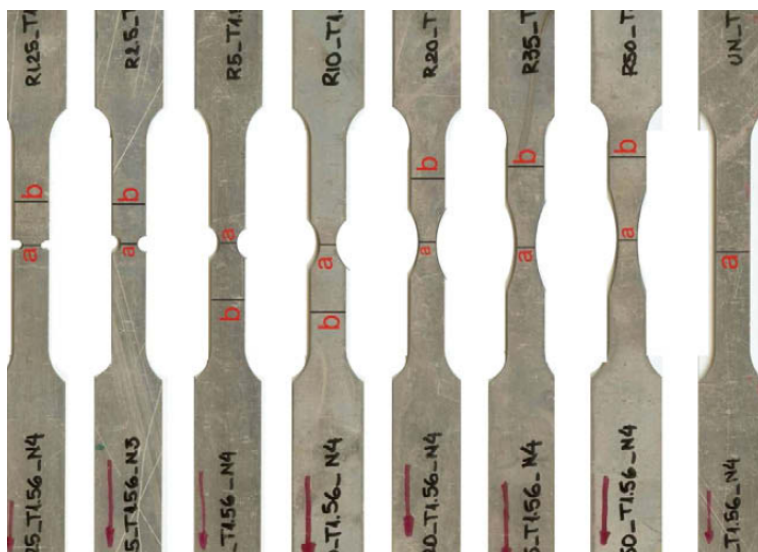


Figura 2.10: Probetas utilizadas por Driemeier et al. [62].

- En 2010, Boisot et al. [63] investigaron experimental y numéricamente la influencia de la tensión hidrostática en el comportamiento mecánico del polímero Poliamida 11. En el estudio, ajustan los

parámetros del modelo de daño de Gurson-Tvergaard-Needleman, basándose en ensayos de tracción sobre probetas con distintas geometrías (ver Figura 2.11).

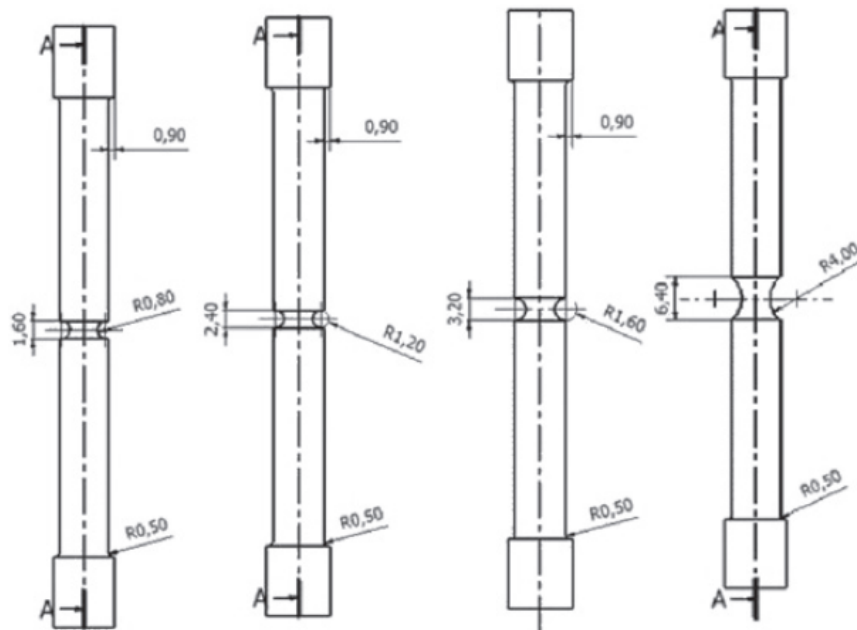


Figura 2.11: Probetas utilizadas por Boisot et al. [63].

Los trabajos anteriores ilustran que el estudio experimental de la influencia de la tensión hidrostática en el comportamiento de materiales queda prácticamente limitado a ensayos de tracción en probetas de sección variable, y a ensayos de compresión confinada donde la probeta ve restringido su movimiento en dirección transversal mediante un anillo que ejerce presión sobre la misma.

2.3.3. Introducción del invariante J_3

La introducción del invariante J_3 en el criterio de plastificación, necesario en muchos casos para activar los procesos responsables del flujo plástico, requiere que el nivel tensional sea menor en estados de cortadura que en tracción y/o compresión. En 1949, Drucker propuso una función de plastificación que dependía del segundo y tercer invariantes del tensor de tensiones desviador, cuya superficie de plastificación se extendía entre la superficie del criterio de Von Mises y del modelo de Tresca.

En 2000, Brunig [64] desarrolló un modelo basado en I_1 , J_2 y J_3 , que implementó numéricamente con el fin de analizar la sensibilidad de algunos metales a la tensión hidrostática y al parámetro de Lode. En 2004, Kuroda [65] propuso un modelo fenomenológico de plasticidad que tenía en cuenta la influencia de la tensión hidrostática, y en 2005, Hu y Wang [66] propusieron un criterio de plastificación, dependiente del estado tensional, para materiales dúctiles isótropos. Cazacu y Barlat (2003) [67] y Soare et al. (2007) [68] extendieron el modelo de Drucker a materiales anisótropos y lo aplicaron a procesos de conformado, y más recientemente, en 2008, Bai y Wierzbicki [69] analizaron un modelo de plasticidad dependiente del parámetro de Lode, y lo aplicaron a procesos de rotura de materiales metálicos.

Para polímeros, la incorporación del invariante J_3 en el modelo de comportamiento implica que la energía necesaria para activar la movilidad molecular es mayor en tensión y/o compresión que en cortadura. Lee y Ghosh (1996) [70] propusieron un significado físico que justificaba la aparición de este invariante, basado en los movimientos de rotación moleculares de este tipo de materiales.

A continuación, se muestran investigaciones experimentales recientes que estudiaron la influencia del invariante J_3 en el comportamiento de materiales.

- En 2002, Rittel et al. [71] desarrollaron por primera vez los ensayos de compresión-cortadura en probetas de tipo SCS. En su trabajo, analizaron el comportamiento mecánico del cobre OFHC en cortadura a distintas velocidades de deformación, desde 10^{-3} hasta $3,2 \pm 10^4 \text{ s}^{-1}$, y obtuvieron expresiones analíticas que las relacionaba con la fuerza aplicada y las dimensiones de la probeta, utilizando para ello como herramienta auxiliar el Método de los Elementos Finitos (ver Figura 2.12).

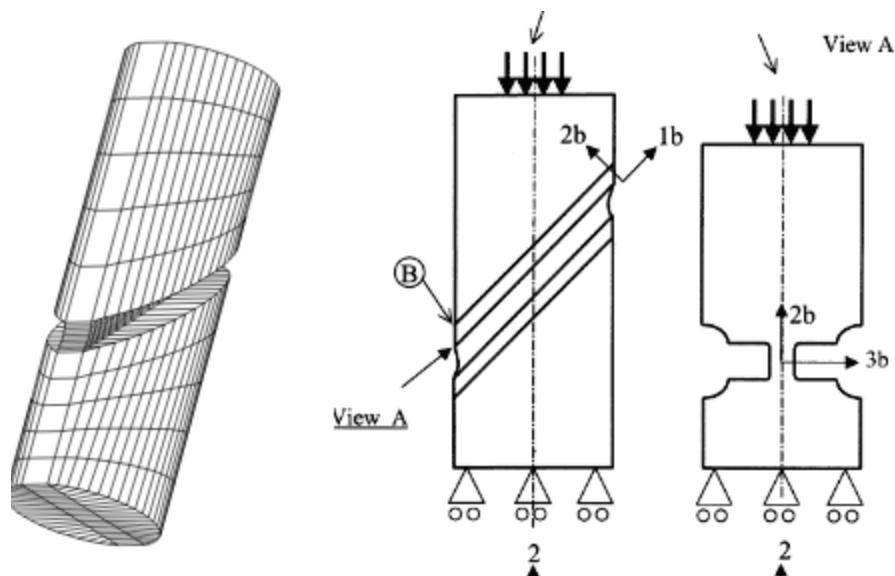


Figura 2.12: Modelo numérico utilizado por Rittel et al. [71].

- En 2010, Driemeier et al. [62] analizaron el comportamiento mecánico de aleaciones de aluminio sometidas a ensayos de cortadura. La finalidad del estudio era obtener relaciones constitutivas y criterios de fallo que se vieran influidos por el parámetro de Lode. Para ello, realizaron ensayos cuasiestáticos de cortadura en probetas como las

mostradas en la Figura 2.13, que fueron ensayadas traccionando en sus extremos.

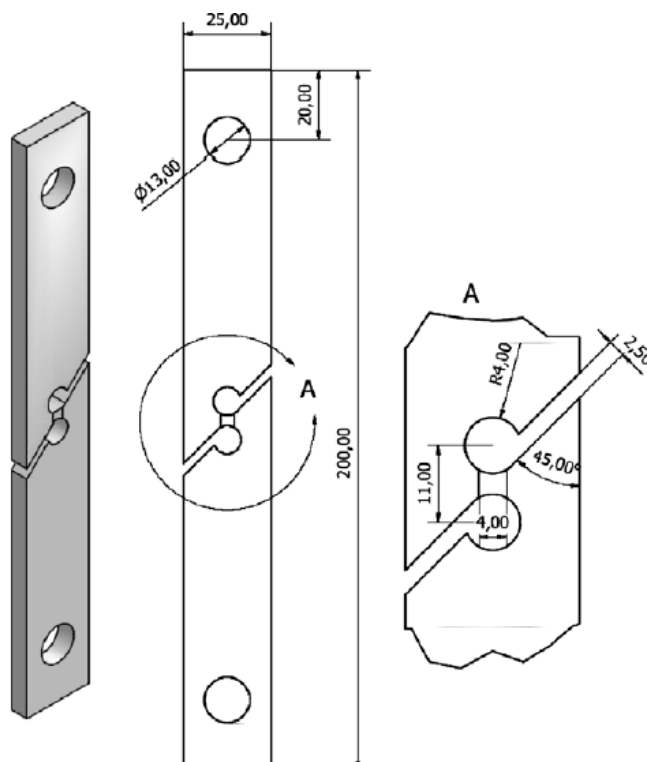


Figura 2.13: Probeta utilizada por Driemeier et al. [62].

- En 2010, Ames et al. [72] ensayaron probetas de compresión-cortadura de tipo SCS (ver Figura 2.14), y observaron que la región central de la misma se veía sometida a un estado de cortadura pura, presentando una distribución tensional relativamente homogénea.
- En 2014, Yin et al. [73] realizaron un estudio experimental y numérico para caracterizar el comportamiento de materiales metálicos frente a cargas de cortadura. Para ello, utilizaron diferentes configuraciones de probetas, como la mostrada en la Figura 2.15, que había sido propuesta anteriormente por Merklein y Biasutti (2011) [74].

Los trabajos anteriores muestran diferentes probetas que han sido utilizadas tradicionalmente para caracterizar materiales a cortadura, y que

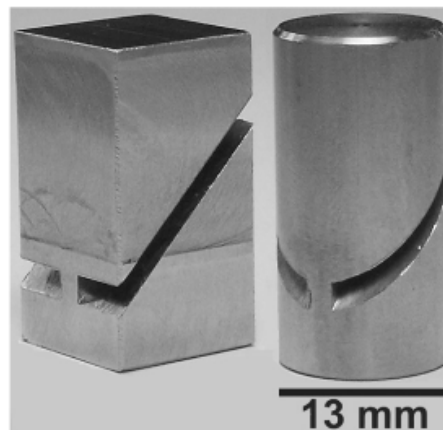


Figura 2.14: Probetas SCS utilizadas por Ames et al. [72].

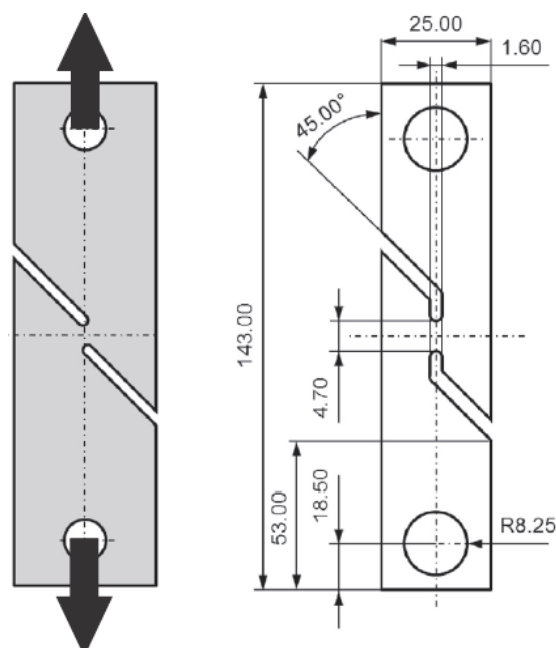


Figura 2.15: Probeta utilizada por Yin et al. [73].

suponen una referencia a la hora de analizar la influencia del parámetro de Lode, o equivalentemente, del invariante J_3 , en el comportamiento mecánico de materiales, en particular de los polímeros.

2.3.4. Conclusiones extraíbles

Según los trabajos expuestos anteriormente, se concluye que los invariantes I_1 , J_2 y J_3 , correspondiente cada uno a un mecanismo de deformación independiente, deben introducirse conjuntamente en las leyes constitutivas y de comportamiento de los polímeros. Por otro lado, se deben tener en cuenta los distintos comportamientos a tracción y a compresión, así como su sensibilidad a la temperatura y a la velocidad de deformación. Bajo este contexto, destacan los trabajos de Eyring, 1936 [14]; Brooks et al., 1998 [75]; Dasari and Misra, 2003 [76] y Nasraoui et al., 2012 [2], entre otros.

Como consecuencia de lo anterior, en 2008, Ghorbel [18] analizó el comportamiento viscoplástico de varios polímeros amorfos y semicristalinos teniendo en cuenta la influencia de los invariantes I_1 , J_2 y J_3 . Para ello, aplicó un modelo numérico de plasticidad a resultados experimentales que extrajo de la literatura. Los modelos que consideró se pueden expresar de manera general mediante:

$$\psi^N \left) \frac{(3J_2)^{1/2}}{\sigma_t} \left\{ \begin{matrix} n \\ + a \frac{I_1}{\sigma_t} \end{matrix} \right. \quad b = 0 \quad (2.20)$$

con:

$$\psi = \frac{8}{7} \left) 1 \quad \frac{27}{32} \frac{J_3^2}{J_2^3} \left[\quad (2.21)$$

donde n y N son parámetros, y a y b dependen del cociente entre el límite elástico a compresión y a tracción, m . La Tabla 2.2 muestra, para cada modelo considerado por Ghorbel, el valor de n , N , a y b :

Modelo de comportamiento	n	N	a	b
Drucker-Prager	1	0	$\frac{m-1}{m+1}$	$\frac{2m}{m+1}$
Raghava	2	0	m	1
Ghorbel	2	1	m	1

Tabla 2.2: Parámetros correspondientes a diferentes modelos que siguen la expresión general dada por la ecuación 2.20.

En la Tabla 2.2 se observa que Ghorbel utilizó los modelos de Drucker-Prager y de Raghava como base de su investigación. Por simplicidad, consideró los límites elásticos a tracción y a compresión, σ_t y σ_c , respectivamente, como las tensiones nominales máximas del material, y utilizó un valor de m constante en cada caso analizado, ya que no tuvo en cuenta su sensibilidad a la temperatura y a la velocidad de deformación.

Los resultados experimentales que utilizó Ghorbel para comprobar sus modelos son referentes a diferentes polímeros amorfos y semicristalinos, relativos a ensayos de tracción y compresión uniaxiales y de cortadura pura [46-48, 77-81].

Ghorbel concluyó que su modelo propuesto, que incorporaba J_3 , predecía aceptablemente el comportamiento de polímeros que se deforman de forma relativamente homogénea, como el PMMA, así como de otros que se deforman más heterogéneamente, como el Policarbonato. La investigación también mostraba que el modelo de Raghava se aproxima al comportamiento de casi todos polímeros considerados, especialmente a altos niveles de tensión hidrostática, sin embargo, ninguno de los modelos predice satisfactoriamente resultados experimentales asociados a estados de tensión biaxial. Asimismo, afirmó que el modelo de Raghava no repro-

ducía los resultados experimentales cuando el mecanismo de deformación predominante son las bandas de cortante.

Del trabajo de Ghorbel se extrae que, si bien los modelos considerados reproducían aceptablemente bien el comportamiento de la mayoría de los polímeros analizados, este hecho quedaba restringido a determinados rangos de validez. Además, no se analizó la influencia que posibles variaciones de temperatura o velocidad de deformación pueden ejercer sobre la afinidad del modelo con los resultados experimentales. No obstante, su trabajo supuso un punto de inflexión en el estudio del comportamiento termoviscoplastico de los polímeros, y ha sido la base del modelo de comportamiento desarrollado en la presente Tesis Doctoral, y que será expuesto en el Capítulo 3.

Se puede concluir por tanto que, a pesar del gran número de estudios numéricos y experimentales sobre el comportamiento termoviscoplastico de los polímeros, no existen modelos que permitan reproducir completamente el comportamiento de un conjunto amplio de polímeros, ya que se trata de materiales que se ven afectados por un gran número de factores (la velocidad de deformación, la temperatura, las diferentes respuestas en tracción y compresión y tres invariantes tensionales independientes), hecho que dificulta su caracterización mecánica y su modelización. Por otra parte, la estructura molecular de cada polímero particular determina las propiedades mecánicas de éste, por tanto, cabe esperar que cada modelo de comportamiento se ajuste bien únicamente a un reducido grupo de materiales poliméricos con características similares.

Capítulo 3

Modelo constitutivo propuesto y su implementación numérica

En este capítulo se plantea un modelo de comportamiento aplicable a polímeros, y se desarrolla su implementación numérica en un código de Elementos Finitos.

3.1. Introducción

En el Capítulo 2 se llevó a cabo un análisis bibliográfico del que se concluyó que son diversos los factores que afectan al comportamiento termoviscoplastico de la mayoría de los polímeros, y que es necesario tener en cuenta en el desarrollo de modelos de comportamiento. Destacan la influencia de la temperatura y de la velocidad de deformación y los diferentes comportamientos a tracción y a compresión, así como la necesidad de incorporar los invariantes I_1 y J_3 .

En el presente capítulo se describen las ecuaciones del modelo de comportamiento desarrollado en esta Tesis Doctoral, y se expone el procedimiento de integración de las ecuaciones constitutivas consideradas. El criterio de plastificación desarrollado supondrá una generalización del propuesto por Ghorbel, en el que además de la influencia de los invariantes I_1 , J_2 y J_3 , se tendrá en cuenta la influencia de la temperatura y de la velocidad de deformación, así como los diferentes comportamientos a tracción y a compresión.

Para resolver el problema, se partirá de unas ecuaciones de gobierno que, una vez formuladas adecuadamente, permitirán obtener las variables tenseodeformacionales de interés:

- Conservación de la masa.
- Conservación de la cantidad de movimiento.
- Conservación del momento de la cantidad de movimiento.
- Conservación de la energía.

- Ecuaciones constitutivas termomecánicas.
- Ecuaciones termodinámicas de estado.

3.2. Ecuaciones constitutivas

La resolución de un problema de la mecánica de sólidos deformables consiste en obtener el campo de desplazamientos, tensiones y deformaciones (y eventualmente otras variables de interés, como la densidad, la temperatura, la deformación plástica equivalente, etc.) en todos los puntos del sólido y en todos los instantes de tiempo de interés. Como datos de partida, se conocen las propiedades termomecánicas del material y las condiciones iniciales y de contorno.

A continuación, se detallan las ecuaciones constitutivas del modelo de comportamiento termoviscoplastico propuesto:

- **Hipótesis de aditividad de deformaciones:**

Según la cinemática de sólidos deformables, la velocidad de deformación total es la suma de sus componentes elástica, plástica y térmica:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p + \dot{\epsilon}^\theta \quad (3.1)$$

- **Relación entre tensiones y deformaciones elásticas:**

El tensor de tensiones de Cauchy, σ , se relaciona con el tensor de velocidades de deformación elásticas, $\dot{\epsilon}^e$, a través de la ley de Hooke generalizada:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (3.2)$$

donde \mathbf{C} es el tensor elástico isótropo lineal de cuarto orden:

$$\mathbf{C} = 2G \mathbf{I} + \lambda \mathbf{1} \bullet \mathbf{1} \quad (3.3)$$

siendo G y λ constantes elásticas del material, relacionadas con el módulo de elasticidad, E , y con el coeficiente de Poisson, ν :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.4)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \quad (3.5)$$

\mathbf{I} y $\mathbf{1}$ son los tensores unitarios de cuarto y segundo orden, respectivamente, definidos como:

$$I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad (3.6)$$

$$1_{ij} = \delta_{ij} \quad (3.7)$$

donde δ_{mn} es la función delta de Kronecker.

■ Criterio de plastificación:

La función de plastificación del modelo propuesto parte de la utilizada por Ghorbel en su trabajo, y tiene la expresión:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \psi^N \left(\frac{\nabla \overline{3J_2}}{\sigma_t} \right)^n \left[1 + a_n \frac{I_1}{\sigma_t} \right] b_n \quad (3.8)$$

donde ψ es una función del segundo y tercer invariantes del tensor de tensiones desviador, dada por:

$$\psi = \frac{8}{7} \left) 1 - \frac{27}{32} \frac{J_3^2}{J_2^3} \left[\quad \quad \quad \right] \quad (3.9)$$

Los términos a_n y b_n se relacionan con σ_c y σ_t a través de:

$$a_n = \frac{m^n - 1}{m + 1}, \quad b_n = \frac{m - m^{n-1} + 1}{m + 1} \quad (3.10)$$

siendo n un parámetro del modelo, y m el cociente entre los límites elásticos a compresión y a tracción, $m = \sigma_c/\sigma_t$, dados como función de la deformación plástica equivalente, $\bar{\epsilon}^p$, la velocidad de deformación plástica equivalente, $\dot{\bar{\epsilon}}^p$, y la temperatura, θ :

$$\sigma_t = \sigma_t(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta), \quad \sigma_c = \sigma_c(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta) \quad (3.11)$$

El parámetro N toma el valor 1 si se considera influencia de J_3 , y 0 si no se tiene en cuenta.

■ Deformación plástica equivalente:

La deformación plástica equivalente se define incrementalmente a través de la relación:

$$\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d}\bar{\epsilon}^p : \mathbf{d}\bar{\epsilon}^p} \quad (3.12)$$

con

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d}\bar{\epsilon}^p : \mathbf{d}\bar{\epsilon}^p} \quad (3.13)$$

■ Evolución de la deformación plástica:

Para la evolución de la deformación plástica, se establece una regla de flujo plástico derivable del Principio del Trabajo Plástico Máximo:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.14)$$

donde $\dot{\lambda}$ representa la magnitud de la variación de la deformación plástica, y el gradiente $\partial\Phi/\partial\sigma$ indica la dirección de esta variación, normal a la superficie de plastificación.

■ **Condiciones de Kuhn-Tucker:**

Las condiciones de carga-descarga establecen:

$$\dot{\lambda} \approx 0, \quad \Phi \geq 0, \quad \Phi \dot{\lambda} = 0 \quad (3.15)$$

En particular, para el caso de carga elástica o descarga, se tiene que:

$$\dot{\lambda} = 0, \quad \Phi < 0 \quad (3.16)$$

mientras que para el caso de carga elastoplástica:

$$\dot{\lambda} > 0, \quad \Phi = 0 \quad (3.17)$$

Este último supuesto implica necesariamente que $\dot{\Phi} = 0$, expresión que se conoce como condición de consistencia.

■ **Deformaciones por incremento térmico:**

La evolución de la deformación debida al incremento de temperatura puede escribirse en función del coeficiente de dilatación térmica, α , como:

$$\dot{\epsilon}^{\theta} = \alpha \dot{\theta} \mathbf{1} \quad (3.18)$$

■ **Equivalencia del trabajo plástico:**

Asumiendo la hipótesis de equivalencia de trabajo plástico en el material, se tiene la expresión:

$$\sigma : \dot{\epsilon}^p = \sigma_y \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (3.19)$$

donde σ_y es el límite elástico del material. La expresión ha sido ampliamente utilizada en materiales con comportamiento similar a tracción y a compresión, sin embargo, en materiales que presentan comportamientos distintos, hay que redefinir el valor de σ_y .

Es claro que en los casos de tracción y compresión uniaxiales, $\sigma_y = \sigma_t$ y $\sigma_y = \sigma_c$, respectivamente. Siendo consistentes con ello, en este trabajo se propone la siguiente expresión:

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_c & \text{si } I_1 < 0 \\ \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_c) & \text{si } I_1 = 0 \\ \sigma_t & \text{si } I_1 > 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Se puede comprobar que para estados de carga de tracción o compresión uniaxial, se recupera el correspondiente límite elástico.

■ **Velocidad de deformación plástica equivalente:**

La velocidad de deformación plástica equivalente se obtiene por diferenciación en el tiempo de la deformación plástica equivalente:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{d\bar{\epsilon}^p}{dt} \quad (3.21)$$

■ **Variación de la densidad:**

Aplicando el principio de conservación de la masa:

$$\dot{m} = 0 \quad / \quad V\dot{\rho} + \rho\dot{V} = 0 \quad (3.22)$$

y teniendo en cuenta que la deformación volumétrica coincide, despreciando términos de segundo orden, con la traza del tensor de deformaciones, se tiene:

$$\frac{\dot{V}}{V} = \dot{\epsilon} : \mathbf{1} \quad (3.23)$$

por tanto:

$$\dot{\rho} = -\rho \dot{\epsilon} : \mathbf{1} \quad (3.24)$$

■ Variación de la temperatura:

Durante el proceso de deformación, una parte de trabajo plástico se convierte en calor. En general, la variación de temperatura viene dada por [82, 83]:

$$k \nabla^2 \theta - \rho C_p \dot{\theta} + \beta \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \alpha (3\lambda + 2G) \theta_0 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e : \mathbf{1} \quad (3.25)$$

donde k es la conductividad térmica, C_p el calor específico, β el parámetro de Taylor-Quinney del material [82, 83] y θ_0 una temperatura de referencia. Si se supone que el proceso de deformación es suficientemente rápido, no hay apenas flujo de calor, y se asume que el proceso es adiabático, la expresión anterior se puede aproximar mediante:

$$\rho C_p \dot{\theta} = \beta \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (3.26)$$

Sin embargo, si el proceso es suficientemente lento, el término conductivo de la expresión 3.25 predomina sobre el resto, consecuentemente, la temperatura puede suponerse uniforme y constante en el tiempo, $\dot{\theta} = 0$. Por tanto, si $\dot{\epsilon}_0$ es la velocidad de deformación que delimita ambas alternativas, se tiene:

$$\begin{cases} \rho C_p \dot{\theta} = \beta \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \dot{\theta} = 0 & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Como hipótesis, se va a considerar que no hay flujo de calor para velocidades de deformación mayores o iguales a $0,1 \text{ s}^{-1}$, y por tanto, para velocidades de deformación menores, la temperatura puede suponerse aproximadamente constante. Esta distinción resultará clave en la resolución numérica posterior, y fue adoptada para el PMMA por Nasraoui et al. en 2012 [84].

Por tanto, integrar las ecuaciones constitutivas consiste en obtener la variación con el tiempo de las variables y tensores λ , ρ , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}^p$, $\bar{\epsilon}^p$, $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ y θ . Para ello, es necesario aplicar:

- Relación entre tensiones y deformaciones elásticas (ecuación 3.2).
- Variación de los límites elásticos a tracción y a compresión con la deformación plástica equivalente, velocidad de deformación plástica equivalente y temperatura (ecuación 3.11).
- Evolución de la deformación plástica (ecuación 3.14).
- Equivalencia del trabajo plástico (ecuación 3.19).
- Velocidad de deformación plástica equivalente (ecuación 3.21).
- Variación de la densidad (ecuación 3.24).
- Variación de la temperatura por disipación plástica (ecuación 3.27).
- Criterio de plastificación (ecuación 3.8).
- Condiciones de Kuhn-Tucker (ecuaciones 3.16 y 3.17).

3.3. Integración consistente

3.3.1. Introducción

La mecánica computacional ha sido ampliamente utilizada durante los últimos 40 años como herramienta de resolución de múltiples problemas

en ingeniería. Dichos problemas, ya sea por la complejidad de sus modelos matemáticos, condiciones de frontera o geometría, son prácticamente irresolubles por otros medios. Diferentes métodos computacionales se han implementado y distribuido en forma de códigos de uso comercial de propósito general.

Entre los métodos computacionales aplicables a la mecánica de sólidos destaca el Método de los Elementos Finitos, que ha transcurrido por diferentes etapas de desarrollo tecnológico, y puede considerarse como la herramienta computacional por excelencia entre la comunidad científica e ingenieril.

En particular, en el caso de análisis de esfuerzos en un medio continuo con materiales elásticos, puede considerarse agotado y las contribuciones actuales se reducen principalmente a modelaciones con complejidades desde un punto de vista geométrico (métodos de mallado) y de las condiciones de frontera (el problema de contacto). En problemas no lineales, como es el que se presenta en esta Tesis Doctoral, las ecuaciones de evolución de las variables del problema son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, altamente no lineales y acopladas.

Desde un punto de vista computacional, las soluciones globales para el modelo discretizado por Elementos Finitos generalmente se obtienen por medio de un proceso incremental-iterativo [85] (por ejemplo, un esquema de Newton-Raphson). En este proceso, un punto clave lo representa la integración temporal del modelo constitutivo.

Las ecuaciones globales se plantean en términos de una variable de tiempo, y la totalidad del análisis se divide en una serie de incrementos no necesariamente iguales. Durante cada intervalo, la respuesta se determi-

na mediante un proceso iterativo hasta encontrar un estado de equilibrio. Una vez se encuentra una solución de equilibrio, la respuesta se actualiza al instante final del incremento.

En el caso de materiales cuya respuesta es independiente de la velocidad de deformación, la variable tiempo es considerada como un pseudo-tiempo; en caso contrario, como ocurre en el presente modelo, dicha variable tiene significado físico. Debido a su formulación incremental, el modelo constitutivo debe integrarse en el tiempo a nivel local, es decir, en los puntos de integración numérica. Más adelante, se desarrollará un procedimiento de integración que resuelve este problema.

Las expresiones anteriores, 3.1-3.27, constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales que deben ser integradas, en general, utilizando procedimientos numéricos. En el planteamiento estándar basado en deformaciones, el campo de desplazamientos se impone de manera proporcional al tamaño del intervalo, y compatible con las condiciones de contorno del modelo en consideración. Posteriormente, el estado tensional resultante de las deformaciones impuestas se determina mediante el proceso de integración temporal de las funciones de evolución.

Este algoritmo de integración es de vital importancia, ya que puede afectar tanto a la precisión de la solución como a la capacidad de convergencia. Por ejemplo, la linealización del estado tensional actualizado da lugar a la matriz de rigidez tangencial o matriz jacobiana de la iteración, que es necesaria para el subsecuente ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos, controlando así la capacidad de convergencia de los mismos. Este proceso de integración y de actualización del estado tensional y de las variables de estado, así como la obtención del Jacobiano, se realiza también en los puntos de integración numérica.

En las primeras etapas de desarrollo de algoritmos para el tratamiento de problemas elastoplásticos, era común la utilización de métodos de integración explícitos o semiexplícitos [86]. Más adelante, se popularizaron los métodos implícitos, debido principalmente a su mayor estabilidad y más amplio rango de aplicación.

Por otro lado, se encuentra el grupo de algoritmos de retorno radial de Wilkins (1964) [87] y Krieg y Key (1976) [88], que realizan el proceso de integración a nivel local haciéndolos muy versátiles para su aplicación en diferentes plataformas. Actualmente, este tipo de estrategias son las más utilizadas por las arquitecturas más modernas de resolución de problemas no lineales por Elementos Finitos. Utilizan un procedimiento de resolución iterativo basado en el método de Newton-Raphson o modificaciones de éste, sin embargo, Simo y Taylor (1985) [89], basados en las contribuciones de Hughes y Taylor (1978) [90] y Nagtegaal (1982) [91], concluyeron que para poder preservar las excelentes propiedades de convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson, era necesario utilizar en el proceso de integración un Jacobiano correspondiente con el algoritmo de integración, y no el obtenido por la formulación continua del problema.

3.3.2. Esquema de resolución

Conocidas las variables en un instante t_n , y dado el tensor incremento de deformación total, $\Delta\epsilon$, que se produce entre este instante y el consecutivo, t_{n+1} , el objetivo es calcular el valor de todas las variables en ese nuevo instante. Los algoritmos de retorno son los más empleados para realizar la integración, y han sido utilizados ampliamente en otros trabajos (véanse [90] y [92]-[95]). Se han utilizado también en la implementación del modelo

propuesto en esta Tesis Doctoral.

En una primera fase, se actualiza el estado tensional bajo la hipótesis de que el incremento de deformación es puramente elástico (predicción elástica). Si el valor obtenido se encuentra en el dominio elástico, el procedimiento termina, y se actualizan las demás variables. En caso contrario, se debe iniciar una segunda fase, calculando el incremento del tensor de tensiones que es necesario aplicar desde el estado de la fase anterior, para que el estado tensional final se encuentre sobre la superficie de fluencia al final del incremento (corrección plástica), garantizando así la condición de consistencia. La Figura 3.1 muestra el esquema descrito.

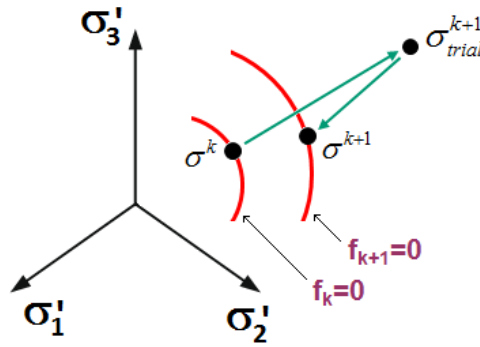


Figura 3.1: Esquema del algoritmo de retorno utilizado.

Numéricamente, el algoritmo consta de dos etapas. La primera consiste en discretizar las ecuaciones diferenciales transformándolas en un sistema de ecuaciones algebraicas, para lo cual se pueden utilizar métodos explícitos, semiexplícitos o implícitos. Cuando se usa un procedimiento implícito, las ecuaciones algebraicas obtenidas son, en general, no lineales, y se resuelven habitualmente por el método de Newton-Raphson [96], constituyendo esta parte la segunda etapa del algoritmo.

3.3.3. Discretización de las ecuaciones diferenciales

Dada la ecuación diferencial de primer orden general:

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (3.28)$$

se pretende encontrar la función $y(t)$ que satisface dicha ecuación. Se puede discretizar implícitamente en el instante t_{n+1} , a través de:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \pm f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (3.29)$$

donde Δt es el paso de integración, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

De este modo, se resuelve y_{n+1} para cada intervalo de tiempo. En general, la ecuación 3.29 es no lineal. La ventaja de los métodos implícitos a los explícitos es que garantizan estabilidad incondicional, lo que permite utilizar un tamaño de paso de tiempo mayor, hecho que acorta el tiempo computacional de resolución del problema.

En este trabajo se ha desarrollado un procedimiento de discretización implícito. Para ello, primeramente ha sido necesario discretizar las ecuaciones que intervienen en el problema.

■ **Relación entre tensiones y deformaciones:**

La relación en términos incrementales entre el tensor de tensiones de Cauchy y el de deformaciones, obtenida a partir de las ecuaciones 3.1 y 3.2, es:

$$\Delta \sigma = C : \Delta \epsilon^e = C : \left[\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^p - \Delta \epsilon^\theta \right] \quad (3.30)$$

por tanto:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + C : \Delta \epsilon - C : \Delta \epsilon^p - C : \Delta \epsilon^\theta \quad (3.31)$$

Se define el tensor de tensiones predictor elástico como:

$$\sigma_{n+1}^{trial} \leq \sigma_n + C : \Delta \epsilon \quad (3.32)$$

que, introducido en la ecuación 3.31, resulta:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - C : \Delta \epsilon^p - C : \Delta \epsilon^\theta \quad (3.33)$$

Expresión para el módulo de Young, E :

Del material se conoce la dependencia del módulo de Young con la velocidad de deformación y con la temperatura, tanto en tracción como en compresión uniaxiales:

$$E_t = f(\theta, \dot{\epsilon}) \quad (3.34)$$

$$E_c = f(\theta, \dot{\epsilon}) \quad (3.35)$$

Para un caso general triaxial, se ha utilizado en esta Tesis Doctoral la siguiente generalización del módulo de Young a un estado triaxial general:

$$E = \begin{cases} E_c & \text{si } I_1 < 0 \\ \frac{1}{2}(E_t + E_c) & \text{si } I_1 = 0 \\ E_t & \text{si } I_1 > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

que recupera $E = E_t$ y $E = E_c$ para tracción y compresión uniaxiales, respectivamente. Los valores E_t y E_c han sido calculados, por simplicidad, en la temperatura al inicio del incremento, $\theta = \theta_n$, y en la velocidad de deformación calculada a partir de las deformaciones equivalentes inicial y final:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\bar{\epsilon}_{n+1} - \bar{\epsilon}_n}{t_{n+1} - t_n} \quad (3.37)$$

con:

$$\bar{\epsilon}_k = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\epsilon}'_k : \boldsymbol{\epsilon}'_k} \quad , \quad k = n, n+1 \quad (3.38)$$

siendo $\boldsymbol{\epsilon}'_n$ y $\boldsymbol{\epsilon}'_{n+1}$ los tensores de deformaciones desviadores, dados por:

$$\boldsymbol{\epsilon}'_n = \boldsymbol{\epsilon}_n - \frac{\epsilon_{ii}(t_n)}{3} \mathbf{1} \quad (3.39)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}'_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}'_n + \Delta \boldsymbol{\epsilon} - \frac{\Delta \epsilon_{ii}}{3} \mathbf{1} \quad (3.40)$$

El invariante I_1 de la expresión 3.36 ha sido calculado, por simplicidad, en el instante t_n .

■ Evolución de la deformación plástica:

Se descompone el gradiente de la función de plastificación respecto al tensor de tensiones:

$$\left) \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1} = \left) \frac{\partial \phi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \phi}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]_{n+1} \quad (3.41)$$

siendo:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{1} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{t} \quad (3.44)$$

que, sustituido en la ecuación 3.14 en forma incremental, resulta:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^p = \Delta \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} \mathbf{s} + \frac{\partial \phi}{\partial J_3} \mathbf{t} \right) \Big|_{n+1} \quad (3.45)$$

■ **Equivalencia del trabajo plástico:**

La discretización de la ecuación 3.19 proporciona:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p = \sigma_y^{n+1} \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p \quad (3.46)$$

■ **Velocidad de deformación plástica equivalente:**

La velocidad de deformación plástica equivalente se expresa, en forma incremental, en función de la deformación plástica equivalente al inicio y al final del incremento (ecuación 3.21):

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{n+1}^p = \frac{\bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p}{\Delta t} \quad (3.47)$$

■ **Variación de la densidad:**

La ecuación diferencial 3.24 en forma incremental queda:

$$\Delta \rho = -\rho_{n+1} (\Delta \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{1}) \quad (3.48)$$

por tanto, la densidad al final del incremento se obtiene como:

$$\rho_{n+1} = \frac{\rho_n}{1 + \Delta\epsilon : \mathbf{1}} \quad (3.49)$$

■ **Variación de la temperatura por disipación plástica:**

La ecuación 3.27 discretizada da lugar a:

$$\begin{cases} \rho_{n+1} C_p \Delta\theta = \beta \boldsymbol{\sigma} : \Delta\epsilon^p & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \Delta\theta = 0 & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{cases} \quad (3.50)$$

donde $\dot{\epsilon}$ viene dado por la expresión 3.37.

■ **Condiciones de Kuhn-Tucker:**

a) Si $\phi \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\| \geq 0$, entonces se tiene:

$$\Delta\lambda = 0 \quad (3.51)$$

La expresión anterior implica además que $\Delta\epsilon^p = \mathbf{0}$, por tanto, se derivarían las siguientes identidades:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} : \Delta\epsilon \quad (3.52)$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^p = \bar{\epsilon}_n^p \quad (3.53)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{n+1}^p = 0 \quad (3.54)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n \quad (3.55)$$

b) Si $\phi \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}\| > 0$, entonces se cumplen:

$$\Delta\lambda > 0 \quad (3.56)$$

$$\phi_{n+1} = 0 \quad (3.57)$$

por tanto, el valor del resto de variables tenso-deformacionales y de estado cambiaría, en general, con respecto al instante inicial del incremento.

3.3.4. Resolución del sistema de ecuaciones

En apartados anteriores se han planteado las ecuaciones diferenciales representativas del modelo, para posteriormente ser discretizadas en forma incremental. En el caso de carga elástica o descarga, $\Phi \cdot \sigma_{n+1}^{trial} \geq 0$, el tensor de tensiones al final del incremento coincide con el predictor elástico, y por tanto la actualización del resto de variables es inmediata (ecuaciones 3.52-3.55). En el caso de incremento elastoplástico, se deben resolver las ecuaciones algebraicas planteadas anteriormente (3.30-3.50 y 3.57).

Introduciendo las ecuaciones 3.8, 3.11 y 3.45 en 3.46, 3.50, 3.52 y 3.57 se llega a un sistema de 1 ecuación tensorial y 4 escalares no lineales (o, equivalentemente, 10 ecuaciones escalares), con 1 incógnita tensorial y 4 escalares (10 incógnitas escalares diferentes), $\sigma_{n+1}, \theta_{n+1}, \rho_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}^p, \Delta\lambda$. El sistema es resuelto a través del método iterativo de Newton-Raphson, que linealiza las ecuaciones. Es importante remarcar que la velocidad de deformación plástica equivalente, $\dot{\bar{\epsilon}}^p$, no es considerada como incógnita, ya que se expresa en función de la deformación plástica equivalente (ecuación 3.21). También es necesario tener en cuenta que la ecuación 3.49 permite calcular ρ_{n+1} de manera independiente al resto de incógnitas, por ello será considerada ajena al método de Newton-Raphson, consecuentemente, el sistema a resolver tiene 9 ecuaciones y 9 incógnitas, que una vez resuelto, proporcionará el tensor de tensiones al final del incremento, y se estará en disposición de actualizar las variables de estado del modelo.

El punto de partida del proceso iterativo son las 9 ecuaciones y 9 incógnitas escalares anteriores, que se pueden expresar mediante la ecuación tensorial $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ y las escalares $f_7 = 0$, $f_8 = 0$ y $f_9 = 0$, cuyas expresiones resultantes son:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \theta_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}^p, \Delta\lambda) \leq \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} + \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p + \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^\theta \quad (3.58)$$

$$f_7(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \theta_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}^p) \leq \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p - \sigma_y - \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \bar{\epsilon}_n^p \quad (3.59)$$

$$f_8(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \theta_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}^p) \leq \Phi_{n+1} \quad (3.60)$$

$$f_9(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \theta_{n+1}, \bar{\epsilon}_{n+1}^p) \leq \begin{pmatrix} \rho_{n+1} C_p (\theta_{n+1} - \theta_n) & \beta \boldsymbol{\sigma}_{n+1} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p \\ \theta_{n+1} - \theta_n & \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{matrix} \quad (3.61)$$

con:

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}^p = \Delta\lambda \left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial\Phi}{\partial J_2} \mathbf{s} + \frac{\partial\Phi}{\partial J_3} \mathbf{t} \right) \Big|_{n+1} \quad (3.62)$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}^\theta = \alpha (\theta_{n+1} - \theta_n) \mathbf{1} \quad (3.63)$$

Algoritmo de Newton-Raphson:

Dado un sistema de n ecuaciones independientes entre sí y n incógnitas:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.64)$$

El algoritmo de Newton-Raphson consiste en la iteración:

$$x_i^{(s+1)} = x_i^{(s)} + \Delta x_i^{(s)} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.65)$$

tal que cada sucesión $\{x_i^{(s)}\}$ converge a la solución buscada, x_i . Cada término incremental, Δx_i^s , es calculado mediante el desarrollo de Taylor de cada función f_i en torno al punto $x_i^{(s)}$, despreciando los términos de segundo orden y siguientes:

$$f_i^{(s)} + \left(\int_{j=1}^n \right) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{(s)} \Delta x_j^{(s)} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.66)$$

El sistema de ecuaciones 3.66 es lineal y puede ser resuelto por métodos clásicos. Por otra parte, cada sucesión $\{x_i^{(s)}\}$ requiere un valor inicial, siendo lo más habitual utilizar el valor inicial en el incremento de tiempo, no obstante, este requerimiento acepta múltiples opciones, siempre y cuando no afecte a la convergencia [97]. También es común inicializar las incógnitas extrapolando su valor de los instantes de tiempo anteriores.

Para la inicialización de σ_{n+1} , $\bar{\epsilon}_{n+1}^p$ y $\Delta\lambda$, se ha optado por el segundo de estos procedimientos, extrapolando cuadráticamente los 3 valores anteriores al instante actual de cálculo, t_n , t_{n-1} y t_{n-2} :

$$\sigma_{n+1}^{(0)} = a_{n+1}t_{n+1}^2 + b_{n+1}t_{n+1} + c_{n+1} \quad (3.67)$$

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{p(0)} = d_{n+1}t_{n+1}^2 + e_{n+1}t_{n+1} + f_{n+1} \quad (3.68)$$

$$\Delta\lambda^{(0)} = g_{n+1}t_{n+1}^2 + h_{n+1}t_{n+1} + i_{n+1} \quad (3.69)$$

obteniéndose, utilizando el método de Cramer [98]:

$$a_{n+1} = \frac{\tilde{a}_{n+1}}{\det}, \quad b_{n+1} = \frac{\tilde{b}_{n+1}}{\det}, \quad c_{n+1} = \frac{\tilde{c}_{n+1}}{\det} \quad (3.70)$$

$$d_{n+1} = \frac{\tilde{d}_{n+1}}{\det}, \quad e_{n+1} = \frac{\tilde{e}_{n+1}}{\det}, \quad f_{n+1} = \frac{\tilde{f}_{n+1}}{\det} \quad (3.71)$$

$$g_{n+1} = \frac{\tilde{g}_{n+1}}{\det}, \quad h_{n+1} = \frac{\tilde{h}_{n+1}}{\det}, \quad i_{n+1} = \frac{\tilde{i}_{n+1}}{\det} \quad (3.72)$$

donde:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = \begin{pmatrix} \sigma_n & t_n & 1 \\ \sigma_{n-1} & t_{n-1} & 1 \\ \sigma_{n-2} & t_{n-2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_{n+1} = \begin{pmatrix} t_n^2 & \sigma_n & 1 \\ t_{n-1}^2 & \sigma_{n-1} & 1 \\ t_{n-2}^2 & \sigma_{n-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_{n+1} = \begin{pmatrix} t_n^2 & t_n & \sigma_n \\ t_{n-1}^2 & t_{n-1} & \sigma_{n-1} \\ t_{n-2}^2 & t_{n-2} & \sigma_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_n^p & t_n & 1 \\ \bar{\epsilon}_{n-1}^p & t_{n-1} & 1 \\ \bar{\epsilon}_{n-2}^p & t_{n-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{n+1} = \begin{pmatrix} t_n^2 & \bar{\epsilon}_n^p & 1 \\ t_{n-1}^2 & \bar{\epsilon}_{n-1}^p & 1 \\ t_{n-2}^2 & \bar{\epsilon}_{n-2}^p & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_{n+1} = \begin{pmatrix} t_n^2 & t_n & \bar{\epsilon}_n^p \\ t_{n-1}^2 & t_{n-1} & \bar{\epsilon}_{n-1}^p \\ t_{n-2}^2 & t_{n-2} & \bar{\epsilon}_{n-2}^p \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{n+1} = \begin{pmatrix} \Delta\lambda_n & t_n & 1 \\ \Delta\lambda_{n-1} & t_{n-1} & 1 \\ \Delta\lambda_{n-2} & t_{n-2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{h}}_{n+1} = \begin{pmatrix} t_n^2 & \Delta\lambda_n & 1 \\ t_{n-1}^2 & \Delta\lambda_{n-1} & 1 \\ t_{n-2}^2 & \Delta\lambda_{n-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

$$\tilde{\mathbf{i}}_{n+1} = \begin{pmatrix} t_n^2 & t_n & \Delta\lambda_n \\ t_{n-1}^2 & t_{n-1} & \Delta\lambda_{n-1} \\ t_{n-2}^2 & t_{n-2} & \Delta\lambda_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \det = \begin{pmatrix} t_n^2 & t_n & 1 \\ t_{n-1}^2 & t_{n-1} & 1 \\ t_{n-2}^2 & t_{n-2} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

Finalmente, se inicializa θ_{n+1} mediante su estimación teniendo en cuenta la ecuación 3.50:

$$\theta_{n+1}^{(0)} = \begin{cases} \theta_n + \beta \frac{\sigma_y(\bar{\epsilon}_{n+1}^{p(0)} - \bar{\epsilon}_n^p)}{\rho_{n+1} C_p} & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \theta_n & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{cases} \quad (3.78)$$

donde

$$\sigma_y = \sigma_y \left(\bar{\epsilon}_{n+1}^{p(0)}, \dot{\bar{\epsilon}}_{n+1}^{p(0)}, \theta_n \right) \quad (3.79)$$

siendo

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{n+1}^{p(0)} = \frac{\bar{\epsilon}_{n+1}^{p(0)} - \bar{\epsilon}_n^p}{\Delta t} \quad (3.80)$$

3.3.5. Definición del tensor tangente consistente

El tensor tangente consistente o Jacobiano se define como:

$$\mathbf{J}_{n+1} = \left(\frac{\delta \boldsymbol{\sigma}}{\delta \boldsymbol{\epsilon}} \right)_{n+1} \quad (3.81)$$

Para problemas elastoplásticos, la consistencia entre el módulo tangente y los algoritmos de integración empleados en la resolución de las variables de estado es vital para asegurar la convergencia del método. Su cálculo se hace necesario en los análisis de tipo implícito, como el utilizado en el código ABAQUS/Standard [99].

La obtención de dicho tensor tiene como requisito encontrar una relación entre los tensores $\delta \boldsymbol{\sigma}$ y $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ en cada paso de integración, y evaluados al final del incremento. Para ello, se parte de las ecuaciones $f_i = 0$ ($i = 1, \dots, 9$), se calcula su derivada total, $\delta f_i = 0$, y tras resolver un sistema de ecuaciones

lineales se obtiene una expresión que relaciona $\delta\sigma$ con $\delta\epsilon$, obteniendo después, a partir de ésta, el tensor \mathbf{J} :

$$\delta\sigma = \mathbf{J} : \delta\epsilon \quad (3.82)$$

En el caso de incremento puramente elástico, \mathbf{J} coincide con el tensor de cuarto orden \mathbf{C} , sin embargo, en caso contrario, su obtención no es inmediata.

Primeramente, se definen los tensores de orden 4 simétricos $\mathbf{I}_{\sqrt{\epsilon}}$ y $\mathbf{I}_{\sqrt{\sigma}}$ como:

$$\mathbf{I}_{\sqrt{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{I}_{\sqrt{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

que serán de utilidad en el cálculo de la matriz tangente consistente. Adicionalmente, se recuerdan a continuación algunas expresiones tensoriales relevantes:

$$\mathbf{C} : \mathbf{1} = (3\lambda + 2G) \mathbf{1} \quad (3.85)$$

$$\mathbf{C} : \mathbf{s} = 2G\mathbf{s} \quad (3.86)$$

$$\mathbf{C} : \mathbf{t} = 2G\mathbf{t} \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \phi}{\partial I_1} \mathbf{1} + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} \mathbf{s} + \frac{\partial \phi}{\partial J_3} \mathbf{t} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} = & \frac{\partial^2 \phi}{\partial J_2 \partial J_2} (\mathbf{s} \bullet \mathbf{s}) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial J_3 \partial J_3} (\mathbf{t} \bullet \mathbf{t}) + \\ & + \frac{\partial^2 \phi}{\partial J_2 \partial J_3} (\mathbf{s} \bullet \mathbf{t} + \mathbf{t} \bullet \mathbf{s}) + \frac{\partial \phi}{\partial J_2} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \phi}{\partial J_3} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (3.89)$$

y finalmente, se expresa una relación tensorial que será utilizada en el cálculo de la matriz jacobiana:

$$(\mathbf{b} : \mathbf{c}) \mathbf{a} = \left] (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) : \mathbf{I} \right\} : \mathbf{c} = \left] (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}) : \mathbf{I} \right\} : \mathbf{b} \quad (3.90)$$

donde \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son tensores simétricos de orden 2.

Diferenciación de la ecuación tensorial $\mathbf{f} = \mathbf{0}$:

La diferenciación de las 6 ecuaciones escalares de la expresión tensorial 3.58, lleva a la siguiente expresión:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \delta \boldsymbol{\epsilon} \quad \mathbf{C} : \delta \boldsymbol{\epsilon}^p \quad \mathbf{C} : \delta \boldsymbol{\epsilon}^\theta \quad (3.91)$$

donde:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}^p = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \delta \Delta \lambda + \Delta \lambda \delta \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left\{ \right. \right. \quad (3.92)$$

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}^\theta = \alpha \delta \theta \mathbf{1} \quad (3.93)$$

con:

$$\delta \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left\{ = \int_{j=1}^6 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \sigma_k} \delta \sigma_k \left[+ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \bar{\epsilon}^p} \delta \bar{\epsilon}^p + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \delta \dot{\bar{\epsilon}}^p + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \theta} \delta \theta \right. \right. \quad (3.94)$$

$$\delta \dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\delta \bar{\epsilon}^p}{\Delta t} \quad (3.95)$$

siendo σ_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) las 6 componentes independientes del tensor

de tensiones. El sumatorio de la ecuación 3.94 es expresable en forma tensorial como:

$$\sum_{k=1}^6 \left) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma \partial \sigma_k} \delta \sigma_k \left[= \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma \partial \sigma} : \mathbf{I} \left[: \delta \sigma \quad (3.96)$$

Por tanto, introduciendo las ecuaciones 3.92-3.95 en 3.91, se llega a una ecuación tensorial de la forma:

$$\mathbf{H}_{11} : \delta \sigma + \mathbf{H}_{12} : \delta \epsilon + \mathbf{h}_{13} \delta \bar{\epsilon}^p + \mathbf{h}_{14} \delta \theta + \mathbf{h}_{15} \delta \Delta \lambda = 0 \quad (3.97)$$

donde \mathbf{H}_{11} y \mathbf{H}_{12} son tensores de orden 4, mientras que \mathbf{h}_{13} , \mathbf{h}_{14} y \mathbf{h}_{15} son tensores de orden 2. Mediante operaciones algebraicas, y utilizando las expresiones 3.85-3.87, se obtienen los siguientes valores:

$$\mathbf{H}_{11} = \mathbf{I} \quad \Delta \lambda \left) \mathbf{C} : \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma \partial \sigma} : \mathbf{I} \left[\quad (3.98)$$

$$\mathbf{H}_{12} = \mathbf{C} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{13} = & \Delta\lambda \left[(3\lambda + 2G) \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial I_1 \partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial I_1 \partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \left[\mathbf{1} + \right. \\
& + 2G \left. \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial J_2 \partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial J_2 \partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \left[\mathbf{s} + \right. \\
& + 2G \left. \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial J_3 \partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial J_3 \partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \left[\mathbf{t} \left\{ \right. \right.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_{14} = & 3\alpha K (3\lambda + 2G) \mathbf{1} + \Delta\lambda \left) \frac{\partial^2 \phi}{\partial I_1 \partial \theta} (3\lambda + 2G) \mathbf{1} + \right. \\
& + 2G \frac{\partial^2 \phi}{\partial J_2 \partial \theta} \mathbf{s} + 2G \frac{\partial^2 \phi}{\partial J_3 \partial \theta} \mathbf{t} \left[\right.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

$$\mathbf{h}_{15} = \frac{\partial \phi}{\partial I_1} (3\lambda + 2G) \mathbf{1} + 2G \frac{\partial \phi}{\partial J_2} \mathbf{s} + 2G \frac{\partial \phi}{\partial J_3} \mathbf{t} \tag{3.102}$$

Diferenciación de la ecuación $f_7 = 0$:

De la diferenciación de la ecuación 3.59 se tiene:

$$\delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p + \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon}^p = \delta \sigma_y \Delta \bar{\epsilon}^p + \sigma_y \delta \bar{\epsilon}^p \tag{3.103}$$

donde $\delta \boldsymbol{\epsilon}^p$ viene dado por la ecuación 3.92, y siendo $\delta \sigma_y$:

$$\delta\sigma_y = \begin{cases} \delta\sigma_c & si \ I_1 < 0 \\ \frac{1}{2}(\delta\sigma_t + \delta\sigma_c) & si \ I_1 = 0 \\ \delta\sigma_t & si \ I_1 > 0 \end{cases} \quad (3.104)$$

con:

$$\delta\sigma_t = \frac{\partial\sigma_t}{\partial\bar{\epsilon}^p} \delta\bar{\epsilon}^p + \frac{\partial\sigma_t}{\partial\dot{\bar{\epsilon}}^p} \delta\dot{\bar{\epsilon}}^p + \frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta} \delta\theta \quad (3.105)$$

$$\delta\sigma_c = \frac{\partial\sigma_c}{\partial\bar{\epsilon}^p} \delta\bar{\epsilon}^p + \frac{\partial\sigma_c}{\partial\dot{\bar{\epsilon}}^p} \delta\dot{\bar{\epsilon}}^p + \frac{\partial\sigma_c}{\partial\theta} \delta\theta \quad (3.106)$$

Finalmente, mediante operaciones algebraicas, se llega a una expresión escalar de la forma:

$$\boxed{\mathbf{h}_{21} : \delta\boldsymbol{\sigma} + h_{23}\delta\bar{\epsilon}^p + h_{24}\delta\theta + h_{25}\delta\Delta\lambda = 0} \quad (3.107)$$

donde \mathbf{h}_{21} es un tensor de orden 2 y h_{23} , h_{24} y h_{25} son escalares. El tensor \mathbf{h}_{21} resulta:

$$\mathbf{h}_{21} = \Delta\lambda \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} + \Delta\lambda \left) \frac{\partial^2\phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}\partial\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I} \right]_{\sqrt{\quad}}^t \quad (3.108)$$

siendo el tensor de cuarto orden $(\equiv)^t$ definido como:

$$(\equiv)_{ijkl}^t \leq (\equiv)_{klij} \quad (3.109)$$

El resto de coeficientes de la ecuación 3.107 tienen las siguientes expresiones:

$$h_{23} = \boldsymbol{\sigma} : \left[\Delta\lambda \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \left[\left\{ \begin{array}{c} \Delta \bar{\epsilon}^p \end{array} \right\} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \left[\begin{array}{c} \sigma_y \end{array} \right. \right] \quad (3.110)$$

$$h_{24} = \boldsymbol{\sigma} : \left) \Delta\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \theta} \left[\begin{array}{c} \Delta \bar{\epsilon}^p \frac{\partial \sigma_y}{\partial \theta} \end{array} \right. \quad (3.111)$$

$$h_{25} = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.112)$$

Diferenciación de la ecuación $f_8 = 0$:

De la diferenciación de la ecuación 3.60 se tiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\epsilon}^p} \delta \bar{\epsilon}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \delta \dot{\bar{\epsilon}}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \delta \theta + \int_{k=1}^6 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_k} \delta \sigma_k = 0 \quad (3.113)$$

que, introducido en la ecuación 3.95, lleva a una expresión de la forma:

$$\boxed{\mathbf{h}_{31} : \delta \boldsymbol{\sigma} + h_{33} \delta \bar{\epsilon}^p + h_{34} \delta \theta = 0} \quad (3.114)$$

donde \mathbf{h}_{31} es un tensor de orden 2 y h_{33} y h_{34} son escalares, con los valores:

$$(h_{31})_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} & \text{si } i = j \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.115)$$

$$h_{33} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}^p} \quad (3.116)$$

$$h_{34} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (3.117)$$

Diferenciación de la ecuación $f_9 = 0$:

De la diferenciación de la ecuación 3.61 se tiene:

$$\begin{cases} \delta \rho C_p \Delta \theta + \rho C_p \delta \theta = \beta (\delta \sigma_y \Delta \bar{\epsilon}^p + \sigma_y \delta \bar{\epsilon}^p) & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \delta \theta = 0 & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{cases} \quad (3.118)$$

donde $\delta \rho$ se puede expresar en función de $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ mediante la diferenciación de la ecuación 3.24:

$$\delta\rho = \left) \frac{\rho}{1 + \Delta\epsilon : \mathbf{1}} \left[\delta\epsilon : \mathbf{1} \right. \quad (3.119)$$

Finalmente, mediante operaciones algebraicas, se llega a una expresión del tipo:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{h}_{42} : \delta\epsilon + h_{43}\delta\bar{\epsilon}^p + h_{44}\delta\theta = 0 & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \delta\theta = 0 & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{cases}} \quad (3.120)$$

donde \mathbf{h}_{42} es un tensor de orden 2, y h_{43} y h_{44} son escalares:

$$\mathbf{h}_{42} = \frac{\rho C_p \Delta\theta}{1 + \Delta\epsilon : \mathbf{1}} \mathbf{1} \quad (3.121)$$

$$h_{43} = \left. \beta \right] \Delta\bar{\epsilon}^p \left) \frac{\partial\sigma_y}{\partial\bar{\epsilon}^p} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial\sigma_y}{\partial\dot{\bar{\epsilon}}^p} \left[\quad \sigma_y \left\{ \quad (3.122)$$

$$h_{44} = \rho C_p \left) \mathbf{1} \quad \frac{\Delta\theta}{\sigma_y} \frac{\partial\sigma_y}{\partial\theta} \left[\quad (3.123)$$

Obtención del tensor tangente consistente:

A partir de las ecuaciones 3.114 y 3.120, se obtienen expresiones para $\delta\bar{\epsilon}^p$ y $\delta\theta$ en función de $\delta\sigma$ y $\delta\epsilon$:

$$\delta\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 : \delta\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{n}_2 : \delta\boldsymbol{\epsilon} & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ 0 & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{pmatrix} \quad (3.124)$$

$$\delta\bar{\epsilon}^p = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_3 : \delta\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{n}_4 : \delta\boldsymbol{\epsilon} & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \mathbf{n}_5 : \delta\boldsymbol{\sigma} & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

siendo:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{h_{43}}{h_{44}h_{33}} \frac{h_{31}}{h_{34}h_{43}} \mathbf{h}_{31} \quad (3.126)$$

$$\mathbf{n}_2 = \frac{h_{33}}{h_{44}h_{33}} \frac{h_{42}}{h_{34}h_{43}} \mathbf{h}_{42} \quad (3.127)$$

$$\mathbf{n}_3 = \frac{h_{44}}{h_{44}h_{33}} \frac{h_{31}}{h_{34}h_{43}} \mathbf{h}_{31} \quad (3.128)$$

$$\mathbf{n}_4 = \frac{h_{34}}{h_{44}h_{33}} \frac{h_{42}}{h_{34}h_{43}} \mathbf{h}_{42} \quad (3.129)$$

$$\mathbf{n}_5 = \frac{1}{h_{33}} \mathbf{h}_{31} \quad (3.130)$$

que, sustituidas en la ecuación 3.107, permiten obtener $\delta\Delta\lambda$ en función de $\delta\boldsymbol{\sigma}$ y $\delta\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\delta\Delta\lambda = \begin{cases} \mathbf{n}_6 : \delta\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{n}_7 : \delta\boldsymbol{\epsilon} & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \mathbf{n}_8 : \delta\boldsymbol{\sigma} & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{cases} \quad (3.131)$$

donde:

$$\mathbf{n}_6 = \frac{h_{23}h_{44}}{h_{25}(h_{44}h_{33} - h_{24}h_{43})} \mathbf{h}_{31} - \frac{1}{h_{25}} \mathbf{h}_{21} \quad (3.132)$$

$$\mathbf{n}_7 = \frac{h_{24}h_{33}}{h_{25}(h_{44}h_{33} - h_{24}h_{43})} \mathbf{h}_{42} - \frac{h_{23}h_{34}}{h_{25}(h_{44}h_{33} - h_{24}h_{43})} \mathbf{h}_{42} \quad (3.133)$$

$$\mathbf{n}_8 = \frac{1}{h_{33}h_{25}} \mathbf{h}_{31} - \frac{1}{h_{25}} \mathbf{h}_{21} \quad (3.134)$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones 3.124, 3.125 y 3.131 en la ecuación 3.97, y haciendo uso de la relación 3.90, se llega a:

$$\boxed{\mathbf{A} : \delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B} : \delta\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.135)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son los tensores de cuarto orden dados por:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{H}_{11} + (\mathbf{h}_{13} \bullet \mathbf{n}_3 + \mathbf{h}_{14} \bullet \mathbf{n}_1 + \mathbf{h}_{15} \bullet \mathbf{n}_6) : \mathbf{I} & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \mathbf{H}_{11} + (\mathbf{h}_{13} \bullet \mathbf{n}_5 + \mathbf{h}_{15} \bullet \mathbf{n}_8) : \mathbf{I} & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{cases} \quad (3.136)$$

$$B = \begin{pmatrix} H_{12} & (h_{13} \bullet n_4 + h_{14} \bullet n_2 + h_{15} \bullet n_7) : I \\ H_{12} & \end{pmatrix} : \begin{cases} I & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \sqrt{I} & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{cases} \quad (3.137)$$

La matriz tangente consistente, \mathbf{J} , se calcula de manera inmediata a partir de los tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} .

3.4. Implementación en ABAQUS

El algoritmo de integración desarrollado ha sido implementado en el código comercial de elementos finitos ABAQUS/Standard [99], a través de una subrutina de usuario de tipo UMAT [3]. El procedimiento se basa en aplicar el algoritmo anterior para actualizar de manera incremental las variables de estado en cada elemento del modelo y en cada instante de tiempo de interés. Asimismo, es necesario calcular el tensor tangente consistente en cada paso.

La Figura 3.2 muestra el diagrama de flujo del procedimiento numérico aplicado en cada paso de integración y que proporciona las variables de interés del problema termomecánico.

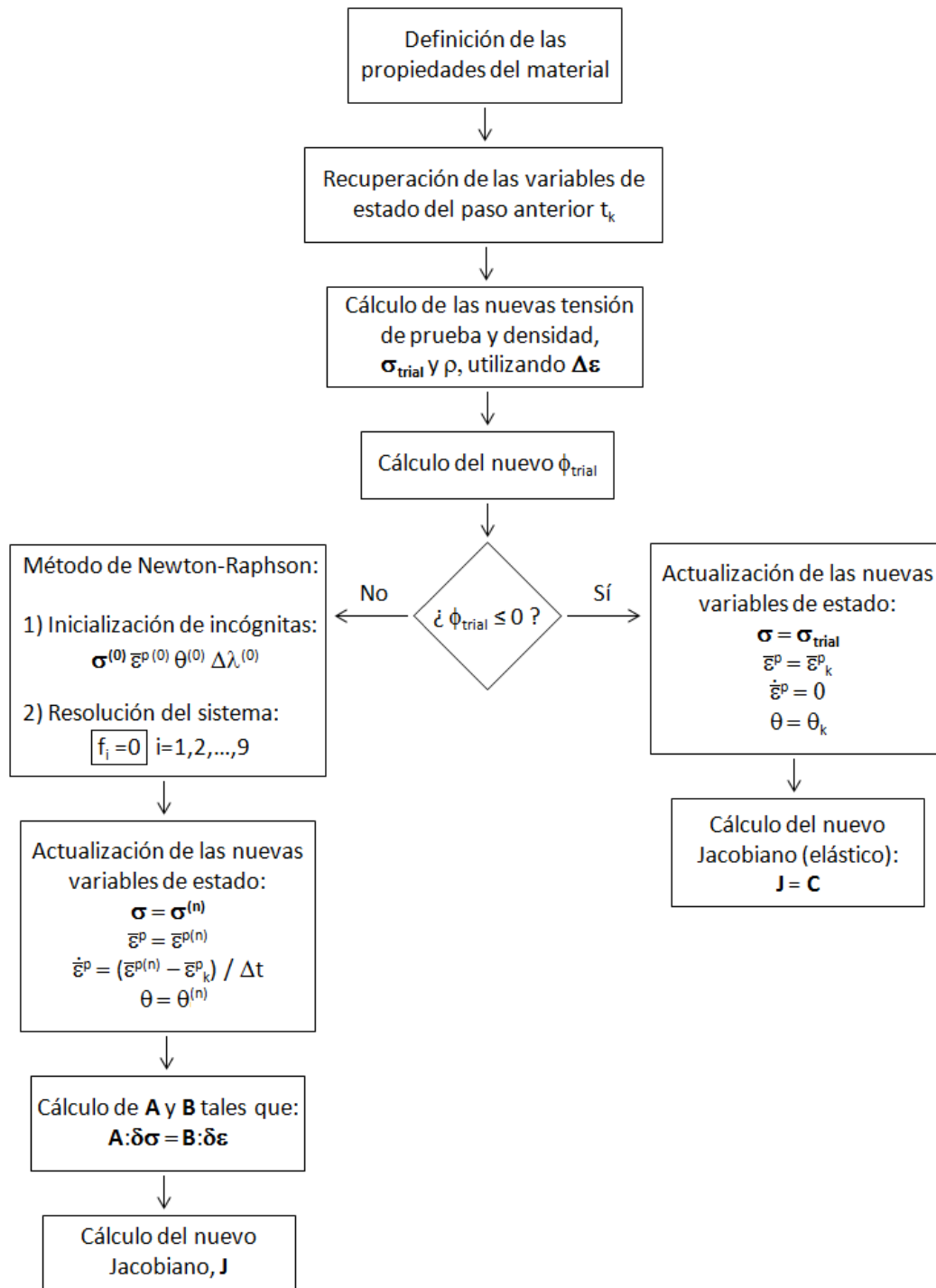


Figura 3.2: Diagrama de flujo del algoritmo numérico implementado.

Capítulo 4

Procedimiento experimental

En este capítulo se presentan los ensayos experimentales realizados y sus resultados.

4.1. Introducción

Se ha realizado un programa de ensayos en el laboratorio del Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad Carlos III de Madrid, utilizando un polímero de referencia.

En primer lugar, se han llevado a cabo ensayos de caracterización mecánica para obtener aquellas propiedades del material que constituyen los datos de entrada del modelo numérico planteado. Posteriormente, con la finalidad de estudiar la influencia de la tensión hidrostática y del invariante J_3 en el comportamiento termoviscoplastico del material, se han realizado ensayos específicos a distintas velocidades de deformación y temperaturas. Concretamente, se han realizado ensayos de compresión confinada y de compresión-cortadura para obtener determinados parámetros del modelo, y ensayos de Flexión en Tres Puntos en probetas en las que previamente se ha realizado un orificio circular pasante en diferentes posiciones, con el objetivo de validar dicho modelo.

El material utilizado en los ensayos ha sido un polímero termoplástico amorfo, el Polimetilmetacrilato (PMMA), cuya estructura está formada por una cadena carbonatada en la que el sustituyente principal es un grupo funcional del tipo $COOCH_3$. Destacan su alta resistencia mecánica en relación a su densidad y su capacidad para transmitir la luz. Su resistencia al impacto es de diez a veinte veces superior a la del vidrio, motivo por el cual es utilizado como sustituto de éste en múltiples aplicaciones ingenieriles. También son destacables sus buenas propiedades como aislante térmico y acústico, así como su fácil mecanización y moldeo.

Las aplicaciones del PMMA son múltiples. A temperatura ambiente, pue-

de ser sometido a procesos de transformación por arranque de viruta, pero cuando se calienta por encima de la temperatura de transición vítrea se convierte en un material tenaz, flexible, extensible, fácilmente deformable en geometrías complejas, y que además puede ser moldeado y extruido. El COOCH_3 es además muy resistente a los reactivos inorgánicos acuosos, lo que garantiza una alta resistencia a la intemperie en comparación con otros polímeros termoplásticos.

Este material ha incrementado su utilización respecto a otros, en aplicaciones de los sectores de la automoción, aeronáutico y biomédico, entre otros, así como en aplicaciones estructurales y en la fabricación de productos industriales y de consumo. Fue uno de los primeros polímeros utilizados como material biomédico, destacando su utilización en prótesis óseas y dentales, como material para reparar la córnea humana y en la fabricación de recipientes médicos.

En la Tabla 4.1 se muestran algunas de las propiedades físicas y termomecánicas más relevantes del PMMA (véanse, por ejemplo, [7, 15, 100, 101]).

4.2. Caracterización mecánica del PMMA

Con el objetivo de obtener las propiedades mecánicas del PMMA necesarias para el modelo numérico, se requiere caracterizar el material a tracción y a compresión uniaxial, realizando ensayos a diferentes temperaturas y velocidades de deformación.

Propiedad	Unidades	Valor
Densidad	kg/m^3	1170-1200
Módulo de Young	GPa	3.0-4.0
Coefficiente de Poisson	-	0.40-0.42
Resistencia a la tracción	MPa	75-100
Resistencia a la compresión	MPa	100-125
Resistencia a la flexión	MPa	80-110
Transmisión de luz	%	$\rightarrow 90$
Índice de refracción	-	1.49
Temperatura máxima de utilización	$^{\circ}C$	85-95
Temperatura de transición vítrea	$^{\circ}C$	100-105
Coefficiente de expansión térmica	$^{\circ}C^{-1}$	5 ± 10^{-5} 8 ± 10^{-5}
Calor específico	$J/kg^{\circ}C$	1440 1460

Tabla 4.1: Propiedades físicas y termomecánicas del PMMA.

4.2.1. Ensayos de tracción uniaxial

Los ensayos de tracción uniaxial permitieron obtener la dependencia del módulo de Young y del límite elástico a tracción con la temperatura y la velocidad de deformación.

4.2.1.1. Descripción de las probetas

Aunque la geometría de la probeta de tracción en polímeros está normalizada según la norma UNE-53-023-94 (ver Figura 4.1), en PMMA dicha geometría fue descartada, ya que para velocidades relativamente altas se producía la rotura espontánea de la probeta en la sección comprendida entre el fuste y el radio de acuerdo, debido a la existencia de concentradores de tensiones introducidos durante su mecanizado.

Por este motivo, se decidió utilizar probetas cuya geometría evitara po-

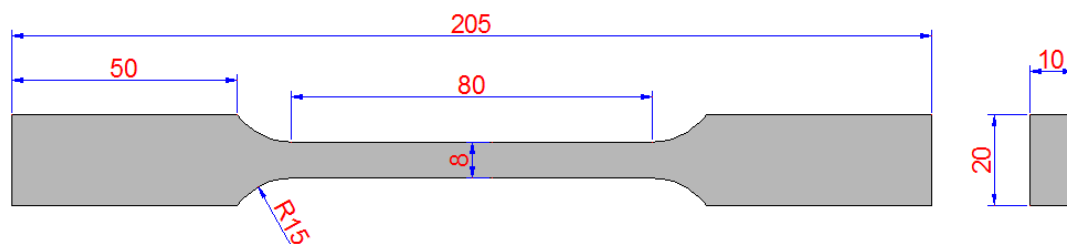


Figura 4.1: Probeta normalizada (UNE-53-023-94).

sibles zonas de concentración de tensiones durante su mecanizado. Las probetas tienen la geometría que se muestra en la Figura 4.2, son planas y han sido obtenidas a partir de una plancha comercial de PMMA de 10 mm de espesor. La zona más estrecha corresponde a la zona central, que será la sección de cálculo de la tensión y deformación.

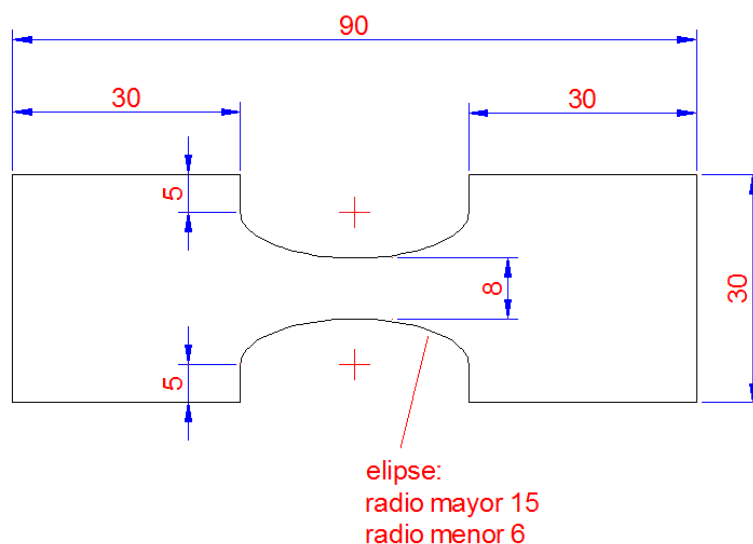


Figura 4.2: Probeta utilizada en la caracterización a tracción del PMMA.

Debido a que la sección transversal del fuste no es constante, es necesario realizar comprobaciones de validez de la geometría. La reducción de la sección transversal en el fuste debe ser lo suficientemente suave para asegurar que el estado de tensiones puede considerarse uniaxial.

Para comprobar este hecho, se ha realizado una simulación numérica

con el Método de los Elementos Finitos en el código comercial ABAQUS/Standard, cuyo objetivo es verificar que el estado tensional en la zona central de la probeta es uniaxial. Para ello, se ha aplicado un desplazamiento de valor 2 mm en los extremos de la probeta (ver Figura 4.3), a una velocidad constante, y se ha considerado un material elástico y lineal con módulo de elasticidad 3 GPa y coeficiente de Poisson $0,41$, que son valores representativos del PMMA.

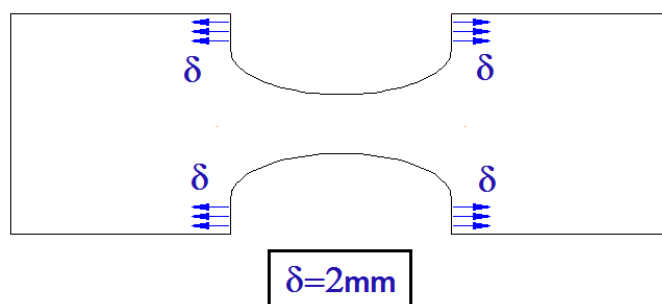


Figura 4.3: Estado de carga utilizado en la verificación del estado tensional en la probeta.

En la simulación se ha considerado un modelo $3D$ y se han tenido en cuenta los tres planos de simetría del problema. Se ha empleado una malla estructurada con elementos de tipo C3D8R de integración reducida, y se han utilizado dos tamaños característicos de los elementos, $0,5$ y 1 mm , siendo los resultados obtenidos similares, con diferencias inferiores al 1% .

El campo tensodeformacional obtenido en la sección central de la probeta muestra que las tensiones en dirección longitudinal (σ_{11}) son mucho mayores que las obtenidas en las direcciones perpendiculares a la anterior (σ_{22} y σ_{33}). Asimismo, se observa que las tres son prácticamente uniformes en la sección central, como se puede apreciar en la Figura 4.4.

Se ha calculado el peso que representan las tensiones transversales, σ_{22} y σ_{33} , frente a la longitudinal, σ_{11} , obteniendo de media un $3,47\%$ y un $0,11\%$, respectivamente, por lo que se puede considerar que el campo ten-

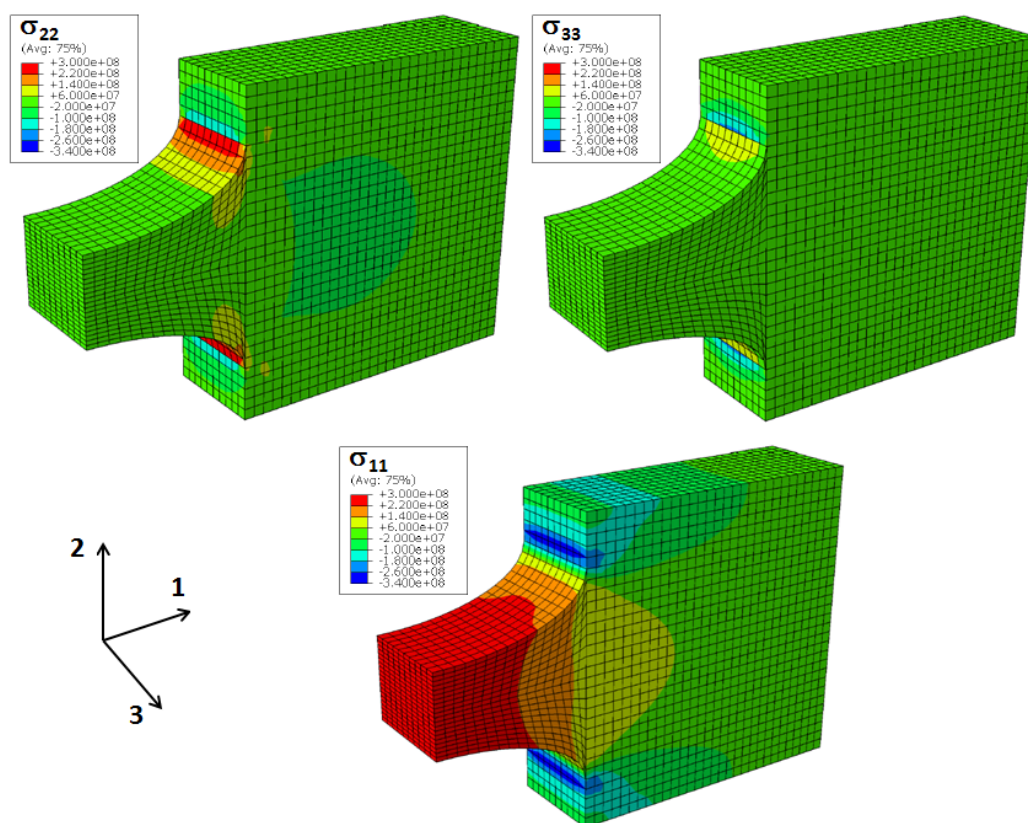


Figura 4.4: Estado tensional obtenido en Abaqus.

sional es uniaxial en la sección de cálculo. En una segunda comprobación, se ha calculado numéricamente el módulo de elasticidad a partir de la tensión y de la deformación longitudinales promediadas en dicha zona, obteniendo un valor de $3,08 \text{ GPa}$, que supone una diferencia de un $2,7\%$ respecto al valor introducido como propiedad del material, recuperando las propiedades elásticas introducidas en el modelo.

Por tanto, la geometría de probeta propuesta fue tomada como adecuada para la caracterización del material en condiciones de tracción uniaxial.

Se ha diseñado un útil fabricado en acero, a través del cual fue aplicada la fuerza sobre la probeta (ver Figura 4.5), evitando así el contacto directo

entre ésta y las mordazas de la máquina de ensayos.

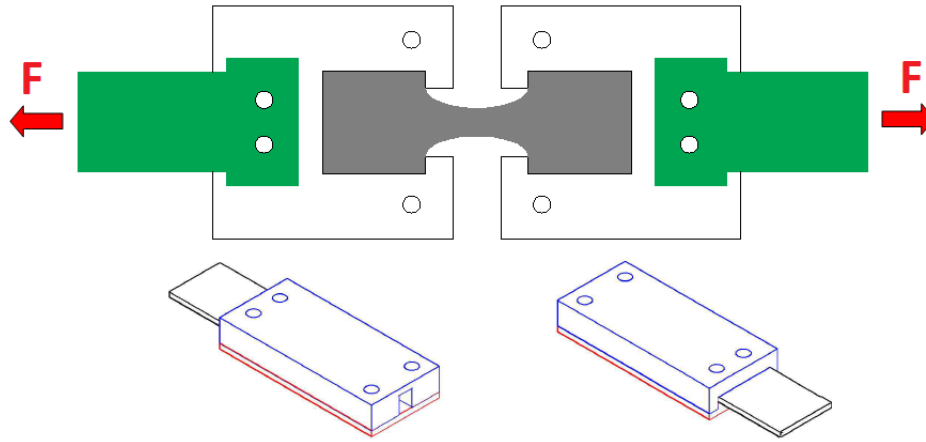


Figura 4.5: Útil auxiliar empleado en los ensayos de tracción del PMMA.

4.2.1.2. Realización del ensayo de tracción uniaxial

El ensayo de tracción uniaxial consiste en situar la probeta dentro del útil, como se mostró en la Figura 4.5, y aplicar una fuerza de tracción monótona creciente en sus extremos en una Máquina Universal de Ensayos, de tal forma que la fuerza es transmitida a la probeta a través del útil descrito anteriormente. La máquina utilizada fue INSTRON modelo 8800, y la carga aplicada era registrada mediante una célula de carga de 100 kN de carga máxima, mientras que la medida del alargamiento del fuste de la probeta se realizó mediante un extensómetro con una base de medida nominal de $12,5\text{ mm}$ y $\otimes 5\text{ mm}$ de recorrido. El control de temperatura se efectuó empleando una cámara climática que permite temperaturas de utilización superiores a 300°C .

Durante la realización del ensayo se registraron los valores de la fuerza y de la longitud de la base de medida del extensómetro, y a partir de sus

medidas se calcularon la tensión aplicada y la deformación en la dirección de aplicación de la carga.

Los ensayos fueron realizados a temperaturas de 25, 45, 65 y 85°C, y a velocidades de desplazamiento del cabezal de 1, 10, 100 y 1000 mm/min , en control de posición. Se llevaron a cabo 4 ensayos para cada combinación de temperatura y velocidad.

4.2.1.3. Resultados obtenidos

A partir de los registros de cada ensayo, se obtuvo la correspondiente curva tensión-deformación verdaderas, discretizada en todos los instantes de tiempo t_k representativos del ensayo. Para ello, se realizó la hipótesis de volumen constante, utilizada anteriormente por otros investigadores en la caracterización de polímeros [2].

La tensión, σ_t , y la deformación longitudinal, ϵ , en un instante genérico, t_k , vienen dadas por:

$$\sigma_t(t_k) = \frac{F_k}{A_0} \left(1 + \frac{\Delta L_k}{L_0} \right) \quad (4.1)$$

$$\epsilon(t_k) = \ln \left[\frac{\Delta L_k + L_0}{L_0} \right] \quad (4.2)$$

donde F_k y ΔL_k son la carga y el alargamiento de la base de medida,

respectivamente, A_0 la sección transversal inicial en la zona central de la probeta, y L_0 la longitud base del extensómetro.

El módulo de elasticidad a tracción, E_t , se obtuvo realizando un ajuste lineal en el tramo inicial de la curva tensión-deformación. Como límite elástico inicial, se ha utilizado la tensión obtenida de la intersección entre la curva tensión-deformación y la recta con pendiente E_t que pasa por el punto $(\epsilon = 0,001, \sigma = 0)$.

A continuación, se calculó la curva tensión frente a deformación plástica equivalente, a través de la relación:

$$\bar{\epsilon}^p(t_k) = \epsilon(t_k) - \frac{\sigma(t_k)}{E_t} \quad (4.3)$$

y finalmente, la velocidad de deformación plástica equivalente y la velocidad de deformación equivalente se estimaron utilizando diferencias finitas centradas:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p(t_k) = \frac{\bar{\epsilon}^p(t_{k+1}) - \bar{\epsilon}^p(t_{k-1}))}{t_{k+1} - t_{k-1}} \quad (4.4)$$

$$\dot{\epsilon}(t_k) = \frac{\epsilon(t_{k+1}) - \epsilon(t_{k-1}))}{t_{k+1} - t_{k-1}} \quad (4.5)$$

A cada ensayo se asociaron una velocidad de deformación plástica equivalente y una velocidad de deformación equivalente promediadas en el tiem-

po, calculadas como la media de las velocidades de deformación plástica equivalentes y de las velocidades de deformación equivalentes de todos los instantes de tiempo del ensayo, respectivamente, es decir:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{1}{n} \int_{j=1}^n \dot{\epsilon}^p(t_k) \quad (4.6)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{n} \int_{j=1}^n \dot{\epsilon}(t_k) \quad (4.7)$$

Por tanto, se tiene, para cada ensayo:

$$\sigma_t = f(\bar{\epsilon}^p; \theta, \dot{\bar{\epsilon}}^p) \quad (4.8)$$

$$E_t = f(\theta, \dot{\bar{\epsilon}}) \quad (4.9)$$

donde θ es la temperatura.

En la Figura 4.6 se muestran la curvas tensión-deformación obtenidas promediando los 4 ensayos de cada tipo.

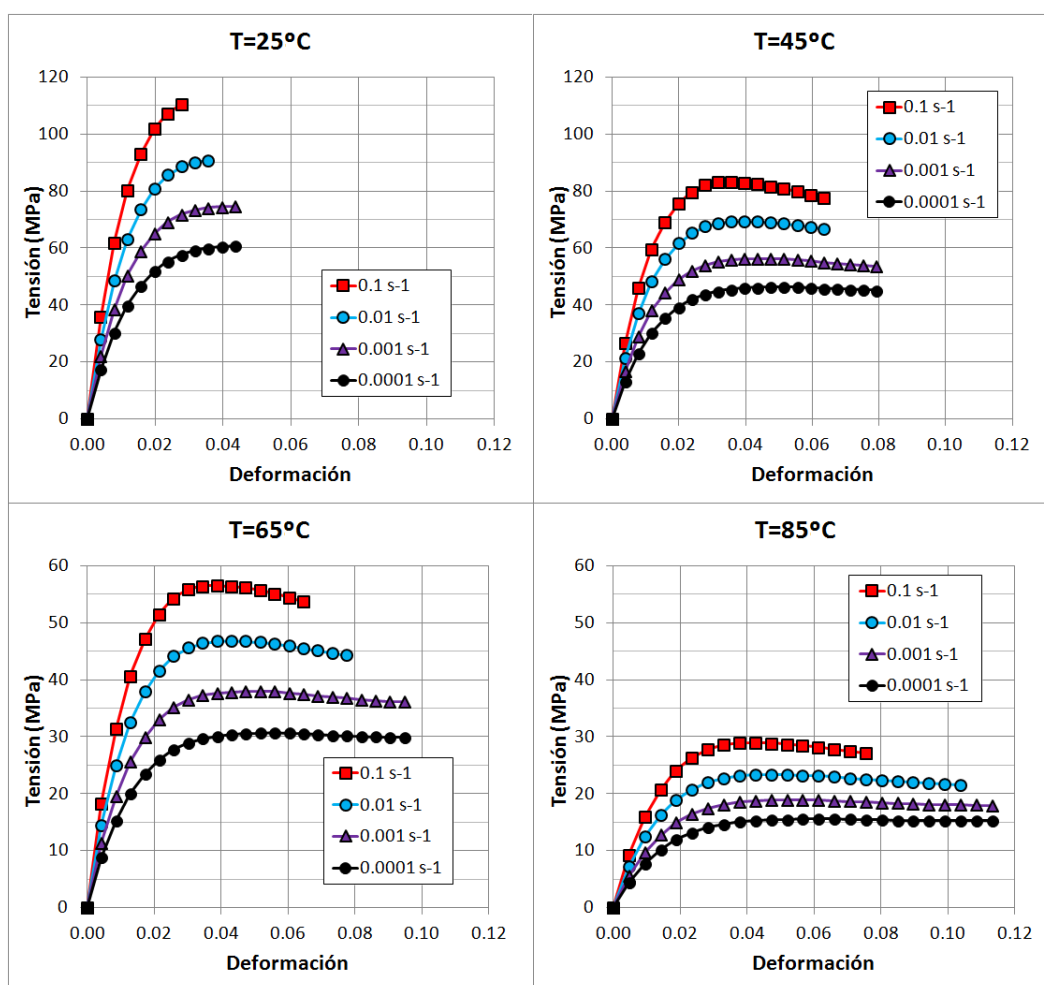


Figura 4.6: Curvas tensión-deformación a tracción obtenidas para el PMMA.

Se puede comprobar que, en todos los casos, el tramo inicial de la curva tensión-deformación es prácticamente lineal, por tanto, se confirma la validez del procedimiento de cálculo del módulo de elasticidad, E_t . Además, se verifica la influencia de la velocidad de deformación en el comportamiento a tracción del PMMA, produciéndose un incremento en el nivel tensional al aumentar ésta. Con respecto a la temperatura, se observa en todos los casos una disminución de la tensión al aumentar ésta. Por otra parte, la deformación de rotura disminuye con la velocidad de deformación y aumenta con la temperatura.

La Figura 4.7 muestra una comparativa que ilustra la influencia de la temperatura y de la velocidad de deformación en los resultados, donde se representa, para todos los casos analizados, la tensión obtenida para una deformación de referencia de valor 0,02.

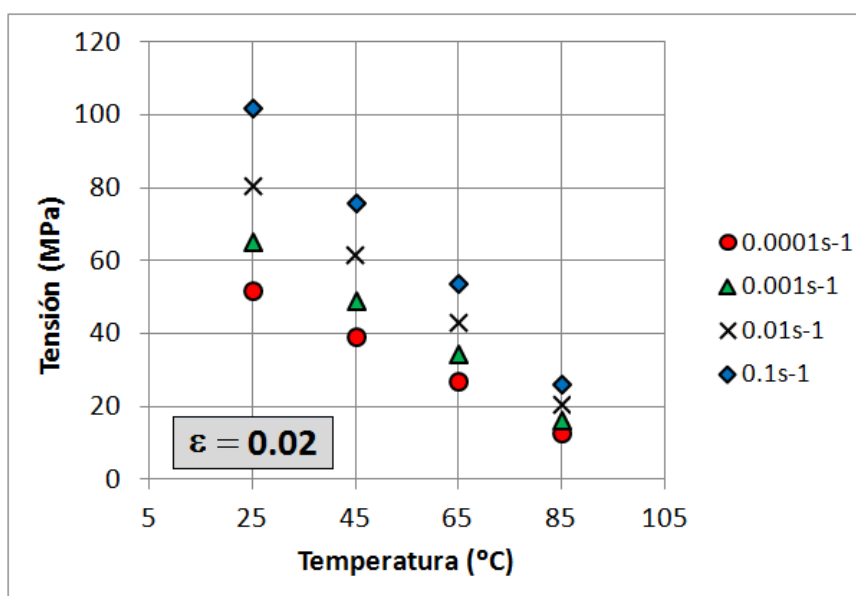


Figura 4.7: Variación de la tensión a tracción con la temperatura y con la velocidad de deformación, para una deformación de referencia de valor 0,02.

Se observa que la sensibilidad con la velocidad de deformación disminuye con la temperatura.

La Tabla 4.2 muestra los valores de E_t (GPa) obtenidos para los casos analizados, observándose que éste disminuye con la temperatura y aumenta con la velocidad de deformación, como era de esperar.

$\theta (^{\circ}C)$ $\dot{\epsilon} (s^{-1})$	25	45	65	85
10^{-4}	$4,4 \otimes 0,3$	$3,3 \otimes 0,2$	$2,0 \otimes 0,3$	$0,94 \otimes 0,2$
10^{-3}	$5,6 \otimes 0,3$	$4,2 \otimes 0,4$	$2,6 \otimes 0,1$	$1,2 \otimes 0,2$
10^{-2}	$7,1 \otimes 0,4$	$5,4 \otimes 0,3$	$3,4 \otimes 0,3$	$1,5 \otimes 0,2$
10^{-1}	$9,1 \otimes 0,4$	$6,8 \otimes 0,2$	$4,2 \otimes 0,3$	$2,0 \otimes 0,3$

Tabla 4.2: Módulo de Young a tracción, expresado en GPa , obtenido para cada temperatura y velocidad de deformación.

4.2.2. Ensayos de compresión uniaxial

Los ensayos de compresión uniaxial permitieron obtener la dependencia del módulo de Young y del límite elástico a compresión con la temperatura y la velocidad de deformación, requeridos por el modelo numérico descrito en el Capítulo 3.

4.2.2.1. Descripción de las probetas y realización del ensayo

El ensayo de compresión uniaxial consiste en aplicar sobre una probeta, habitualmente cilíndrica, una carga de compresión monótona y creciente. La norma ISO 604:2003 describe el procedimiento que permite determinar las propiedades a compresión en polímeros, a temperatura ambiente y en régimen cuasiestático, donde se contempla la posibilidad de utilizar probetas prismáticas, cilíndricas o tubulares.

Sin embargo, en trabajos anteriores de otros autores se han utilizado diferentes geometrías de probeta no necesariamente coincidentes con las especificadas por dicha norma. En la Tabla 4.3 se muestran distintos tipos

de probeta utilizados en la caracterización de polímeros en compresión uniaxial.

Polímero	Geometría	Diámetro (mm)	Longitud (mm)	Referencia
PAI, PC y PMMA	Cilíndrica	6,35	6,35	[10]
PMMA	Cilíndrica	10,0	5,0	[2]
PC y PMMA	Cilíndrica	6,35	8,00	[102]
PC y PMMA	Cilíndrica	12,7	6,35	[103]
PMMA	Cúbica	-	10,0	[104]

Tabla 4.3: Geometrías utilizadas en la caracterización de polímeros en compresión cuasiestática.

Se observa una relación de aspecto, L/d , comprendida entre 0,5 y 1,26, así como diversos diámetros de probeta. En el presente trabajo se optó por utilizar una relación $L/d = 1$, y un diámetro de 22 mm. En la Figura 4.8 se muestra una probeta antes y después de un ensayo de compresión.



Figura 4.8: Probeta de compresión uniaxial, antes y después de un ensayo.

La probeta fue situada entre dos platos de compresión de una Máquina Universal de Ensayos, y la fuerza se aplicó directamente a la probeta mediante una compresión a velocidad del cabezal constante y en control de posición. La fuerza fue registrada por la célula de carga, y el acortamiento de la probeta fue medido directamente a partir del movimiento relativo de los platos de compresión mediante un extensómetro LVDT. Adicionalmente, se ha utilizado un extensómetro diametral que permite medir la deformación circunferencial en la probeta, y consecuentemente obtener el

coeficiente de Poisson del material.

Previamente a la realización de cada ensayo se han lubricado las superficies de contacto entre la probeta y los platos, minimizando el rozamiento, y por tanto el abarrilamiento de la misma. El número de repeticiones y las velocidades y temperaturas consideradas son los mismos que en los ensayos de tracción, así como la máquina de ensayos, la célula de carga y la cámara climática utilizadas.

4.2.2.2. Resultados Obtenidos

A partir de la curva carga-desplazamiento registrada para cada ensayo, y utilizando de nuevo la hipótesis de volumen constante, se obtuvieron las correspondientes tensiones y deformaciones:

$$\sigma(t_k) = \frac{F_k}{A_0} \left(1 - \frac{\Delta L_k}{L_0} \right) \quad (4.10)$$

$$\epsilon(t_k) = \ln \left[\frac{L_0}{L_0 - \Delta L_k} \right] \quad (4.11)$$

donde F_k y ΔL_k son la carga aplicada y el acortamiento en el instante t_k , respectivamente, L_0 la longitud inicial y A_0 el área inicial de la sección central de la probeta. El módulo de elasticidad, E_c , y el límite elástico inicial, σ_{yc}^0 , se calcularon análogamente al caso de tracción.

Posteriormente, se obtuvieron la deformación plástica equivalente, la velocidad de deformación plástica equivalente y la velocidad equivalente:

$$\bar{\epsilon}^p(t_k) = \sqrt{\epsilon(t_k)} \sqrt{\frac{\sigma(t_k)}{E_t}} \quad (4.12)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p(t_k) = \frac{\bar{\epsilon}^p(t_{k+1}) - \bar{\epsilon}^p(t_{k-1})}{t_{k+1} - t_{k-1}} \quad (4.13)$$

$$\dot{\epsilon}(t_k) = \frac{\sqrt{\epsilon(t_{k+1})}}{t_{k+1} - t_{k-1}} \sqrt{\epsilon(t_{k-1})} \quad (4.14)$$

obteniendo por tanto, para cada ensayo:

$$\sigma_c = f(\bar{\epsilon}^p; \theta, \dot{\bar{\epsilon}}^p) \quad (4.15)$$

$$E_c = f(\theta, \dot{\epsilon}) \quad (4.16)$$

En la Figura 4.9 se muestran las curvas tensión-deformación promedio obtenidas para cada velocidad de deformación y temperatura.

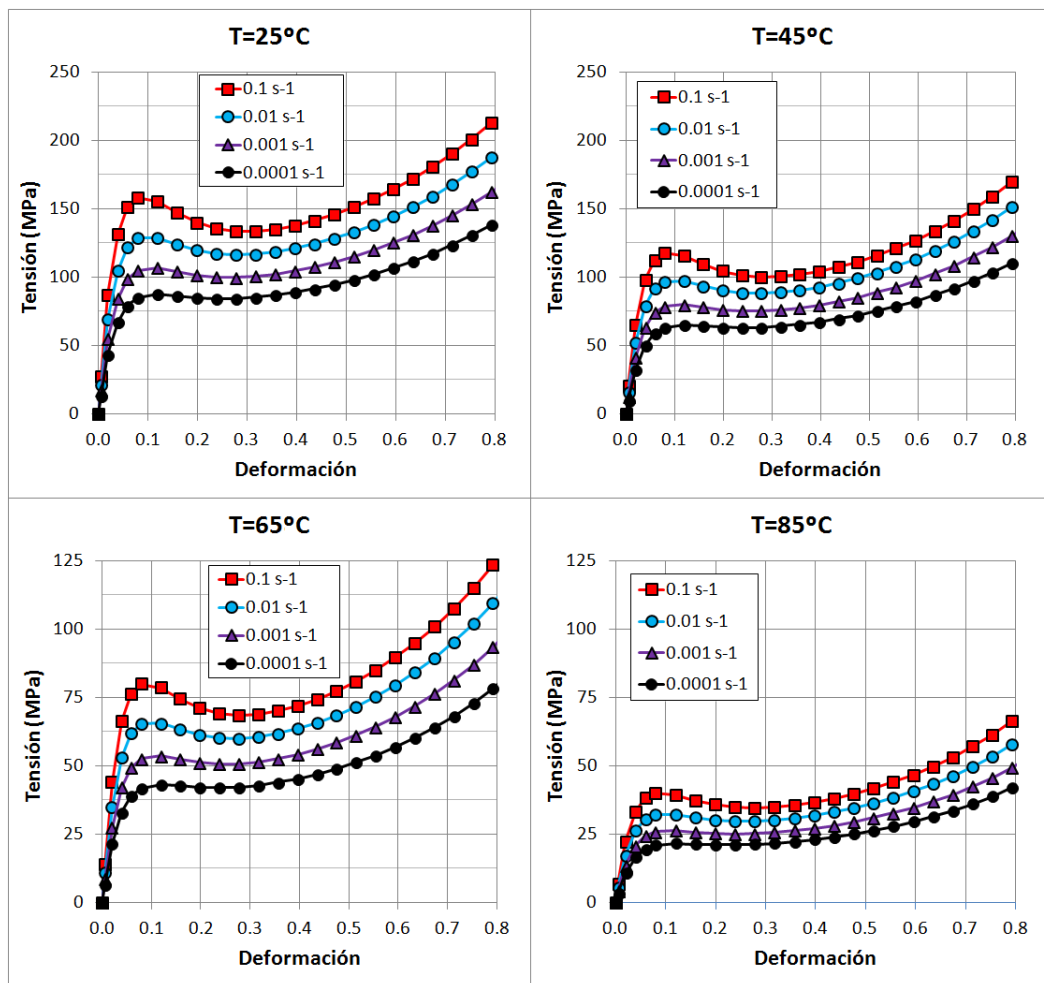


Figura 4.9: Curvas tensión-deformación a compresión obtenidas para el PMMA.

El comportamiento del PMMA a compresión muestra una zona de ablandamiento anterior al endurecimiento del material hasta rotura, debido a la estructura molecular característica de este tipo de materiales.

Además, se observa que un aumento en la velocidad de deformación o una disminución de la temperatura producen un incremento en la tensión para un valor dado de la deformación. En los ensayos, no fue posible alcanzar la rotura de las probetas, debido a la limitación de 100 *kN* en la célula de carga, observándose que las deformaciones alcanzadas son mucho mayores que en tracción.

La Tabla 4.4 muestra los valores de E_c (GPa) obtenidos para los casos analizados.

$\theta (^{\circ}C)$ $\dot{\epsilon} (s^{-1})$	25	45	65	85
10^{-4}	$2,0 \otimes 0,2$	$1,8 \otimes 0,1$	$1,3 \otimes 0,2$	$0,51 \otimes 0,2$
10^{-3}	$3,1 \otimes 0,4$	$2,4 \otimes 0,3$	$1,3 \otimes 0,3$	$0,71 \otimes 0,1$
10^{-2}	$3,5 \otimes 0,3$	$2,4 \otimes 0,2$	$1,9 \otimes 0,2$	$0,92 \otimes 0,2$
10^{-1}	$4,4 \otimes 0,3$	$3,3 \otimes 0,4$	$2,4 \otimes 0,3$	$1,4 \otimes 0,2$

Tabla 4.4: Módulo de Young a compresión, expresado en GPa , obtenido para cada temperatura y velocidad de deformación.

Se observa que, igual que ocurría para tracción uniaxial, el módulo de Young disminuye con la temperatura y aumenta con la velocidad de deformación.

Con respecto a la medida del coeficiente de Poisson, se ha encontrado que éste no varía excesivamente con la temperatura y la velocidad de deformación, siendo la máxima diferencia de un 4 %. El valor promedio obtenido, y que será considerado constante, es 0,41.

La Figura 4.10 muestra una comparativa que ilustra la influencia de la temperatura y de la velocidad de deformación en los resultados, donde se representa, para todos los casos analizados, la tensión obtenida para una deformación de referencia de valor 0,4.

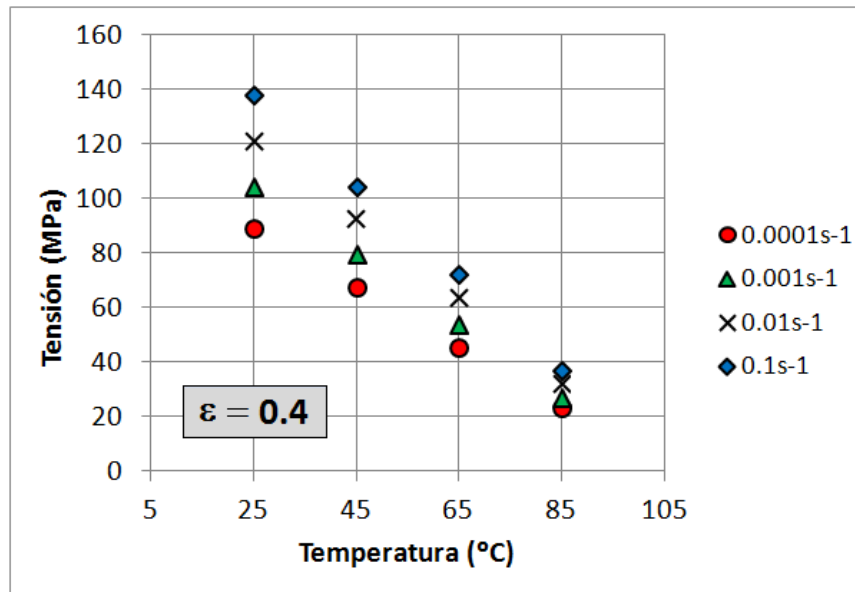


Figura 4.10: Variación de la tensión a compresión con la temperatura y la velocidad de deformación, para una deformación de referencia de valor 0,4.

Al igual que ocurría en tracción uniaxial, la sensibilidad a la velocidad de deformación disminuye al aumentar la temperatura.

4.2.3. Resumen de resultados

Se ha caracterizado el comportamiento del PMMA en tracción y compresión uniaxial, obteniendo las curvas tensión-deformación para distintas velocidades de ensayo y temperaturas, comprendidas entre 10^{-4} y 10^{-1} s^{-1} y 25 y 45°C , respectivamente. Se ha expuesto el procedimiento de cálculo que permite obtener el módulo de elasticidad en función de la temperatura y de la velocidad de deformación de cada ensayo, así como la tensión en función de la temperatura y de la deformación plástica equivalente, expresiones que se resumen en las ecuaciones 4.17-4.20, y que son requeridas por el modelo numérico desarrollado en el Capítulo 3.

$$E_t = f(\theta, \dot{\epsilon}) \quad (4.17)$$

$$E_c = f(\theta, \dot{\epsilon}) \quad (4.18)$$

$$\sigma_t = f(\bar{\epsilon}^p; \theta, \dot{\bar{\epsilon}}^p) \quad (4.19)$$

$$\sigma_c = f(\bar{\epsilon}^p; \theta, \dot{\bar{\epsilon}}^p) \quad (4.20)$$

Los resultados obtenidos muestran que, en todos los casos, se produce un endurecimiento al aumentar la velocidad de deformación y un ablandamiento al aumentar la temperatura.

Asimismo, para una misma temperatura y velocidad de deformación, la tensión es mayor en compresión que en tracción, en torno a 1,4 – 1,5 veces. Con respecto al módulo de Young, se observa en ambos casos que éste aumenta con la velocidad de deformación y disminuye con la temperatura. Además, los resultados muestran que la sensibilidad a la velocidad de deformación disminuye con la temperatura.

Los resultados están de acorde con los obtenidos por otros autores, como se puede comprobar en la Figura 4.11, donde se presenta una comparativa entre las curvas tensión-deformación a compresión obtenidas para 25 y 65°C y para 10^{-4} y 10^{-2} s^{-1} , y las mostradas por Nasraoui et al. [2] en su trabajo.

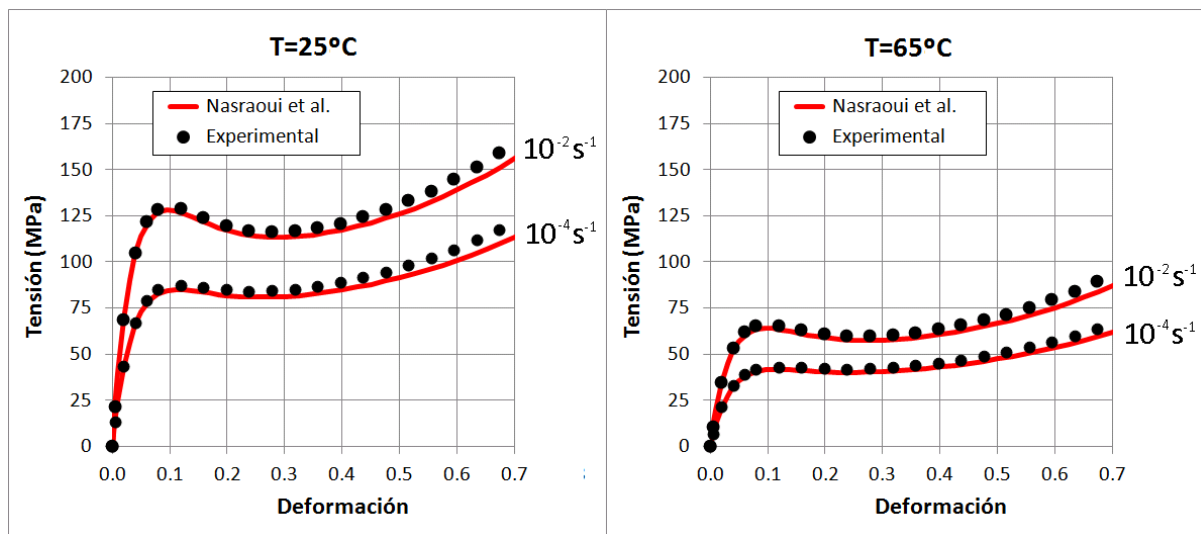


Figura 4.11: Comparativa de las curvas tensión-deformación obtenidas a compresión y las mostradas por Nasraoui et al. [2].

4.3. Ensayos de compresión confinada

4.3.1. Introducción

Para analizar experimentalmente la influencia que presenta la triaxialidad en el comportamiento de materiales, es necesario recurrir a técnicas de ensayo en las que la probeta objeto de análisis posea un nivel de tensión hidrostática que proporcione los niveles de triaxialidad deseados. Bajo este contexto, se pueden encontrar en la literatura un gran número de estudios en materiales metálicos y poliméricos, entre otros, como se detalló en el Capítulo 2.

Como punto de partida, se establece el trabajo de Forquin et al. [105] realizado en 2012, donde se estudió el comportamiento mecánico del PMMA mediante ensayos de compresión confinada a velocidades de deformación comprendidas entre 10^{-3} y 10^3 s^{-1} . Los ensayos fueron realizados en una

máquina universal de ensayos, siendo el dispositivo experimental el mostrado en la Figura 4.12. Se consideraron dos diferentes materiales en el confinamiento: latón y una aleación de aluminio de alta resistencia, alcanzándose presiones hidrostáticas de hasta 600 MPa .

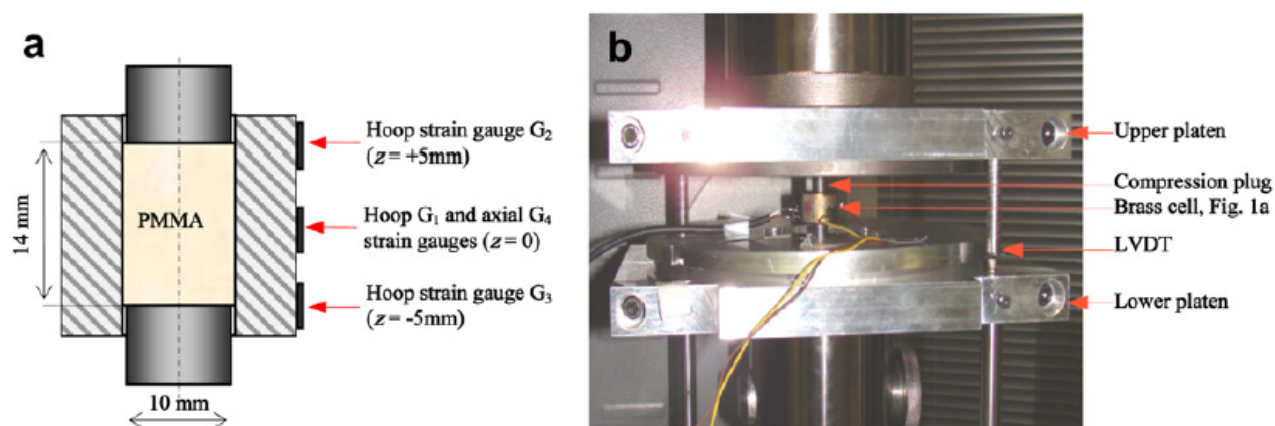


Figura 4.12: Dispositivo experimental del ensayo de compresión confinada.

En la presente tesis, se han realizado ensayos cuasiestáticos de compresión confinada en probetas de PMMA, a diferentes temperaturas y velocidades de deformación, con el objetivo de comparar los resultados con los obtenidos por el modelo numérico implementado en el Capítulo 3. En particular, se han comparado la tensión hidrostática y la tensión equivalente de Von Mises obtenidas por ambos procedimientos. Se han realizado ensayos de compresión confinada que inducen altos niveles de tensión hidrostática, alcanzando valores cercanos a 800 MPa . Además, se ha variado la temperatura desde 25 hasta 85°C , así como la velocidad de aplicación de la carga, desde $0,2\text{ mm/min}$ hasta 200 mm/min , realizando 4 repeticiones para cada combinación.

4.3.2. Procedimiento experimental

Una probeta cilíndrica de PMMA de diámetro 16 mm y longitud 16 mm se encuentra inicialmente confinada en una cavidad cilíndrica de acero de alta resistencia tipo 42CrMo4 [106]. En la Figura 4.13 se muestra un esquema de la disposición inicial, mientras que en la Figura 4.14 se observan la probeta, el confinamiento y las tapas auxiliares utilizados.

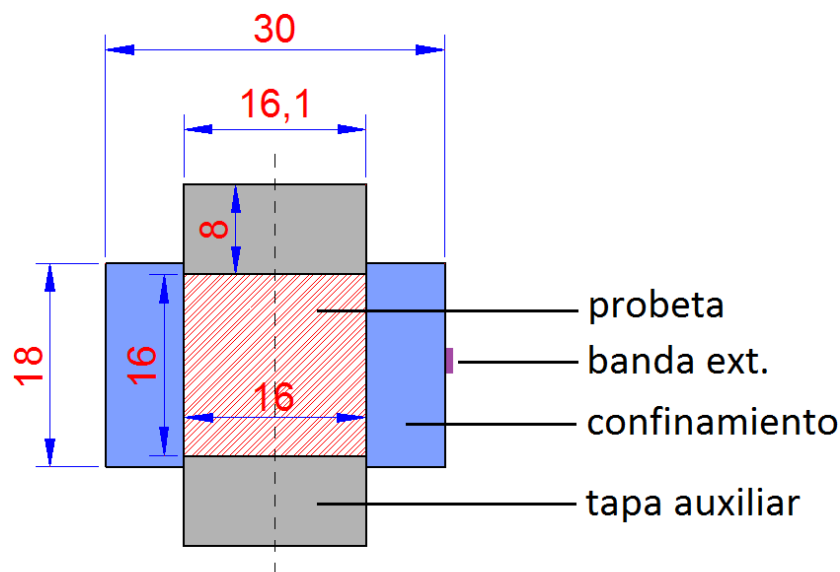


Figura 4.13: Esquema experimental de los ensayos de compresión confinada.

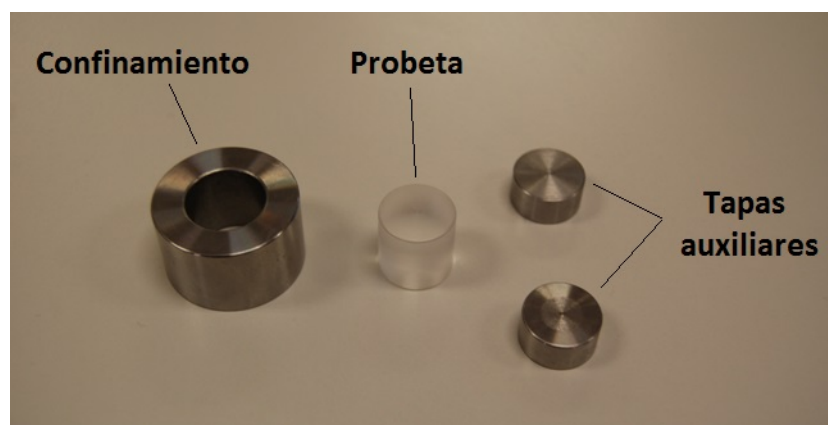


Figura 4.14: Probeta, confinamiento y tapas auxiliares utilizados.

En la Tabla 4.5 se muestra una comparativa entre las dimensiones de probeta y el espesor del confinamiento, $t(mm)$, que utilizaron Rittel y Brill [50] y Forquin et al. [105] en sus ensayos de compresión confinada en PMMA, frente a las consideradas en este trabajo.

Material	D(mm)	L(mm)	t(mm)	Autores
PMMA	6.0	6.0	0.3-0.7	Rittel y Brill [50]
PMMA	10.0	14.0	6.0	Forquin et al. [105]
PMMA	16.0	16.0	7.0	Trabajo actual

Tabla 4.5: Comparativa de diferentes geometrías de probeta utilizadas por diversos autores en ensayos de compresión confinada.

El confinamiento utilizado tiene diámetros interior y exterior 16,1 mm y 30 mm , respectivamente, y longitud 18 mm . El diámetro interior del confinamiento es 0,1 mm mayor que el de la probeta, permitiendo así que ésta pueda ser alojada en su interior cuando la temperatura del ensayo sea superior a la ambiente, ya que el coeficiente de dilatación térmica del PMMA es sensiblemente mayor que el del acero utilizado. En los extremos libres de la probeta se sitúan 2 tapas auxiliares cilíndricas de diámetro 16,1 mm y longitud 8 mm , del mismo material que el confinamiento, con la finalidad de transmitir el movimiento axial de los platos a la probeta.

En la posición central de la superficie exterior del confinamiento se dispone una banda extensométrica, que tiene como finalidad medir la deformación circunferencial en esa posición durante el ensayo. En una Máquina Universal de Ensayos, los platos de compresión ejercen una compresión sobre la probeta, registrando la fuerza mediante una célula de carga y la distancia comprimida mediante el movimiento relativo de los platos, medido con un extensómetro LVDT.

Adicionalmente, se ha aplicado un lubricante en todas las superficies de contacto, para evitar posibles efectos que pueda tener la fricción entre

las superficies en los resultados obtenidos. Forquin et. al., en su trabajo [105], analizaron los efectos de la fricción en probetas confinadas de PM-MA, y concluyeron que su influencia era prácticamente inapreciable. No obstante, a través del lubricante se ha contrarrestado cualquier posible efecto de la fricción en los resultados obtenidos.

El objetivo es establecer un procedimiento que permita calcular la tensión equivalente de Von Mises, σ_{VM} , y la tensión hidrostática, σ_h , en la probeta durante el ensayo, a partir de variables medibles, como son la longitud h de la probeta (véase la Figura 4.15) y la deformación circunferencial registrada por la banda extensométrica del confinamiento, ϵ_θ^b . Alternativamente a la tensión hidrostática, es común utilizar la presión hidrostática, p_h , que se define como $p_h = -\sigma_h$.

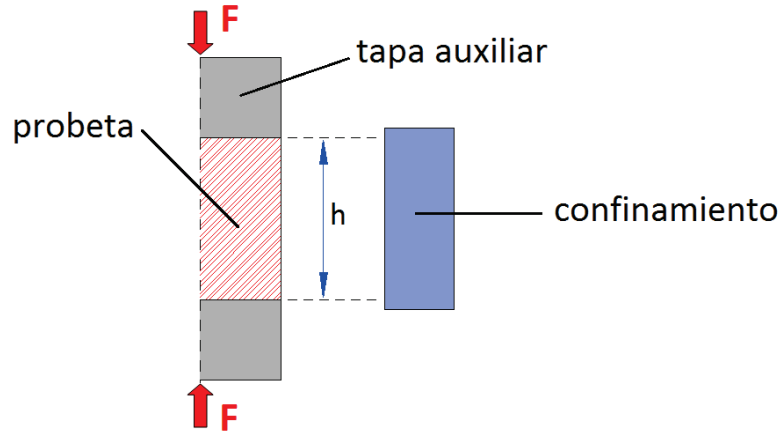


Figura 4.15: Altura h de contacto entre la probeta y el confinamiento.

Para ello, fue necesario recurrir a técnicas numéricas adicionales, así como caracterizar experimentalmente el material del confinamiento. Se obtuvieron expresiones del tipo:

$$\sigma_{radial} = f_1 |\epsilon_\theta^b| h \quad (4.21)$$

$$\epsilon_{\theta} = f_2 \epsilon_{\theta}^b, h^l \quad (4.22)$$

A continuación, se calcularon la tensión y deformación axiales, σ_{axial} y ϵ_{axial} , a partir de la fuerza registrada y de la longitud instantánea de la probeta, F y h :

$$\sigma_{axial} = \frac{F}{\pi (R_0 + \Delta R(\epsilon_{\theta}, h))^2} \quad (4.23)$$

$$\epsilon_{axial} = \ln \frac{h}{h_0} \quad (4.24)$$

con:

$$\Delta R = R_0 \epsilon_{\theta} \quad (4.25)$$

siendo R_0 y h_0 el radio y la longitud iniciales de la probeta, respectivamente. Finalmente, se calcularon la tensión de Von Mises y la presión hidrostática a partir de las tensiones axial y radial:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{axial}^2 + \sigma_{radial}^2} \quad (4.26)$$

$$p_h = \frac{\sigma_h}{\sqrt{3}} = \frac{(\sigma_{axial} + 2\sigma_{radial})}{3} \quad (4.27)$$

Recapitulando, las ecuaciones 4.21-4.27 proporcionan expresiones que permiten calcular la tensión de Von Mises y la presión hidrostática experimentales, a partir de las variables medidas en el ensayo, F , h y ϵ_θ^b . Para ello, es imprescindible caracterizar el comportamiento a tracción del material del confinamiento en el régimen de interés.

4.3.3. Tensión radial y deformación circunferencial en la probeta

El primer objetivo que se plantea es obtener expresiones analíticas que permitan calcular σ_{radial} y ϵ_θ en la probeta, en función de las variables ϵ_θ^b y h medidas durante el ensayo.

Para ello, se han realizado simulaciones numéricas que suponen, como hipótesis, que el material del confinamiento es elástico y lineal. En ellas, se ha utilizado como módulo de elasticidad el valor de referencia $E_{ref} = 200 \text{ GPa}$, mientras que el coeficiente de Poisson utilizado es $\nu = 0,33$.

Como se detallará más adelante, los resultados serán extrapolados a otros valores de módulo de elasticidad obtenidos de la caracterización del material, $E = E(\dot{\epsilon}, \theta)$, mientras que ν podrá suponerse constante e independiente de la temperatura y de la velocidad de deformación.

En las simulaciones, se ha utilizado un modelo axilsimétrico que consi-

dera elementos CAX4R de 4 nodos con integración reducida, siendo el tamaño característico de cada elemento de valor $0,1 \text{ mm}$. Se han simulado 5 valores distintos de h , comprendidos entre 14 mm y 16 mm , rango que se corresponde con el experimental, para posteriormente interpolar los resultados a dicho intervalo de manera continua.

El procedimiento utilizado en cada simulación consiste en imponer un valor de σ_{radial} , y obtener el correspondiente de ϵ_{θ}^b para cada valor de h prefijado (ver esquema en Figura 4.16).

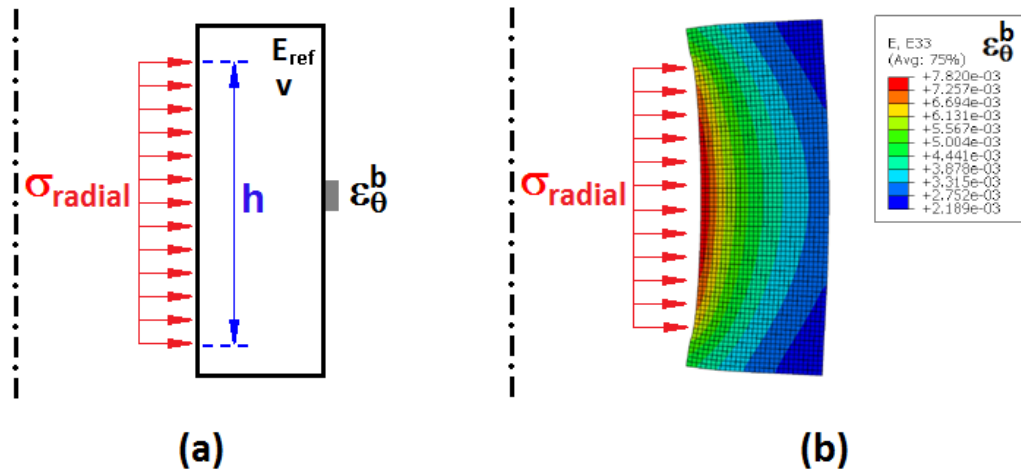


Figura 4.16: (a) Esquema para la obtención de σ_{radial} en función de h y ϵ_{θ}^b ($E_{ref} = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$). (b) Distribución de ϵ_{θ}^b para $\sigma_{radial} = 800 \text{ MPa}$ y $h = 15 \text{ mm}$.

Después, se interpolan las expresiones para cualquier valor de h comprendido entre 14 y 16 mm , y finalmente se extrapola el resultado para un valor de E genérico diferente de E_{ref} , utilizando la hipótesis de que el material del confinamiento es elástico y lineal.

Siguiendo dicho procedimiento, se obtiene la siguiente expresión:

$$\sigma_{radial}(\theta, \dot{\epsilon}, h) = f(h) \pm \frac{E(\theta, \dot{\epsilon})}{E_{ref}} \epsilon_{\theta}^b, \quad 14mm \geq h \geq 16mm \quad (4.28)$$

con

$$f(h) = 8,4343 \pm 10^8 h^2 \quad 3,3463 \pm 10^{13} h + 5,6889 \pm 10^{11} Pa \quad [h \text{ en } m] \quad (4.29)$$

donde $E(\theta, \dot{\epsilon})$ se obtiene de la caracterización mecánica del material del confinamiento, y $E_{ref} = 200 \text{ GPa}$, siendo el parámetro de ajuste R^2 obtenido de la interpolación 0,999996.

Por otra parte, se requiere también la obtención de una expresión que permita calcular la deformación circunferencial en la probeta, ϵ_{θ} , en función de ϵ_{θ}^b y h . Para ello, se utiliza el esquema numérico anterior (Figura 4.16). El procedimiento consiste en obtener numéricamente ϵ_{θ} a partir de ϵ_{θ}^b , E y h , siguiendo un procedimiento similar al utilizado para el cálculo de la tensión radial. La expresión obtenida es:

$$\epsilon_{\theta}(\theta, \dot{\epsilon}, h) = g(h) \pm \frac{E(\theta, \dot{\epsilon})}{E_{ref}} \epsilon_{\theta}^b, \quad 14mm \geq h \geq 16mm \quad (4.30)$$

con

$$g(h) = 755,3750 h^2 \quad 30,3369 h + 1,6014^{\dagger} \quad [h \text{ en } m] \quad (4.31)$$

y $E_0 = 200GPa$, siendo $R^2 = 0,999987$.

4.3.4. Caracterización del material del confinamiento

Se han realizado ensayos de tracción uniaxial a diferentes temperaturas y velocidades de deformación sobre probetas de acero de alta resistencia de tipo 42CrMo4. Para ello, se han utilizado probetas como las mostradas en la Figura 4.17. La deformación axial se ha medido por medio de un extensómetro longitudinal, mientras que la deformación circunferencial se ha obtenido utilizando un extensómetro diametral.

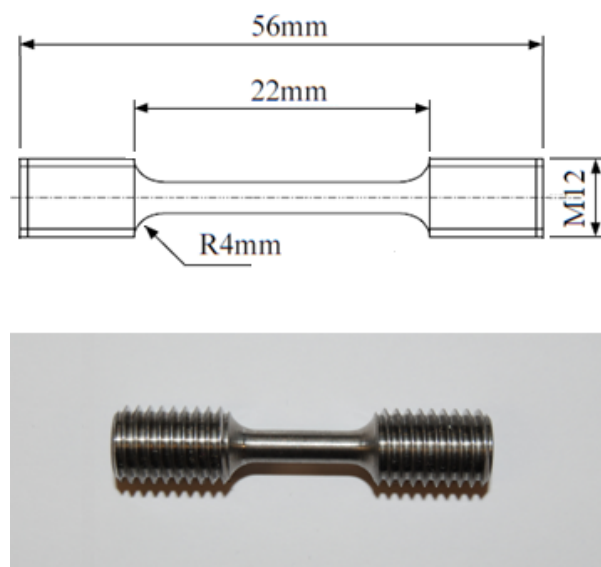


Figura 4.17: Esquema acotado y fotografía de la probeta de tracción uniaxial utilizada para caracterizar experimentalmente el acero de alta resistencia de tipo 42CrMo4.

Los ensayos fueron realizados a temperaturas de 25, 45, 65 y 85°C, mientras que las velocidades de deformación consideradas fueron 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} y $10^{-1} s^{-1}$, realizando 4 repeticiones para cada combinación.

Los resultados mostraron un límite elástico superior a 800 MPa en todos

los casos, siendo el comportamiento lineal hasta este valor. El módulo de elasticidad medido disminuye con la temperatura y prácticamente no varía con la velocidad de deformación. En la Tabla 4.6 se presentan los valores obtenidos, E (GPa):

θ ($^{\circ}C$) \ $\dot{\epsilon}$ (s^{-1})	25	45	65	85
10^{-1}	$220,2 \otimes 3,4$	$210,2 \otimes 4,7$	$202,4 \otimes 3,0$	$185,1 \otimes 3,5$
10^{-2}	$218,0 \otimes 2,5$	$211,7 \otimes 1,6$	$198,0 \otimes 2,9$	$184,2 \otimes 2,4$
10^{-3}	$215,3 \otimes 3,3$	$206,9 \otimes 3,2$	$197,6 \otimes 5,4$	$182,3 \otimes 1,0$
10^{-4}	$215,9 \otimes 4,1$	$203,7 \otimes 0,8$	$189,6 \otimes 2,2$	$184,8 \otimes 3,1$

Tabla 4.6: Módulo de elasticidad del acero de alta resistencia 42CrMo4, expresado en GPa, en función de la temperatura y de la velocidad de deformación.

El coeficiente de Poisson obtenido a partir de las medidas de los extensómetros es 0,33, y prácticamente es independiente de la velocidad de deformación y de la temperatura, en los rangos considerados.

En los ensayos de compresión confinada, el nivel tensional del acero del confinamiento no va a superar el límite elástico, como se mostrará más adelante a través de la tensión radial en la probeta, por tanto, en las consideraciones posteriores, se va a suponer material elástico y lineal con módulo de elasticidad dependiente de la temperatura y de la velocidad de deformación, y coeficiente de Poisson de valor 0,33.

4.3.5. Resultados

En las Figuras 4.18-4.21 se muestran la evolución de la tensión equivalente de Von Mises y de la presión hidrostática con la deformación axial, calculadas a través de los ensayos y de las simulaciones adicionales (Ecuaciones

4.26 y 4.27), para las distintas temperaturas y velocidades de deformación.

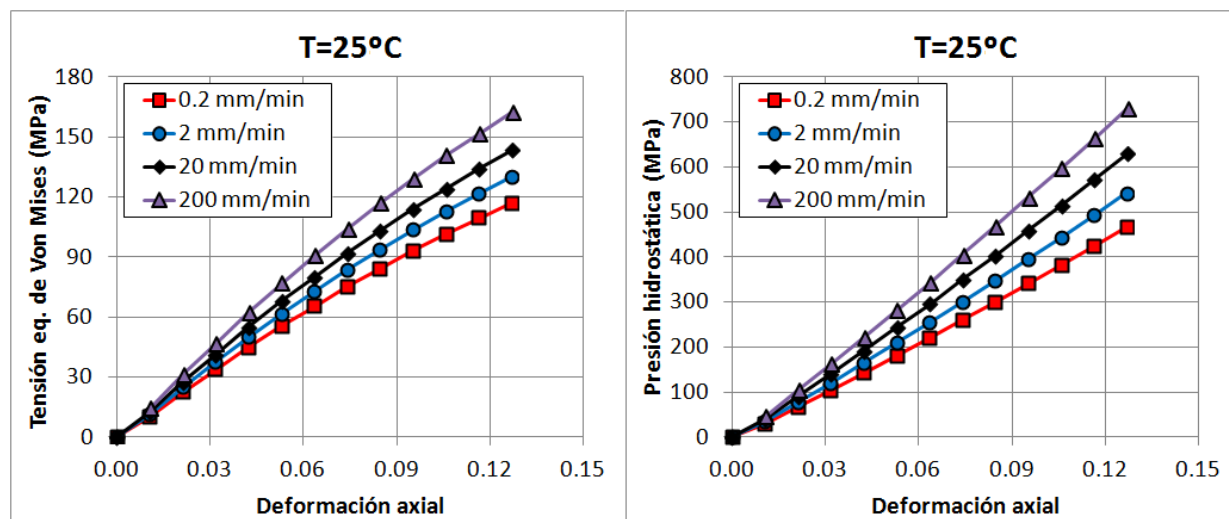


Figura 4.18: Variación de la tensión equivalente de Von Mises y de la presión hidrostática con la deformación axial ($T = 25^\circ\text{C}$).

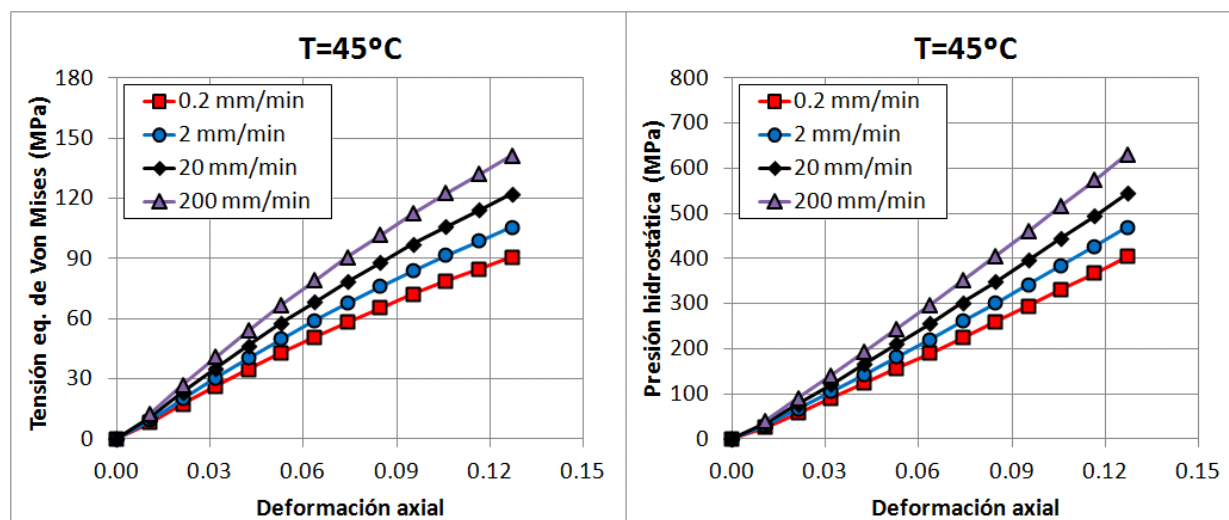


Figura 4.19: Variación de la tensión equivalente de Von Mises y de la presión hidrostática con la deformación axial ($T = 45^\circ\text{C}$).

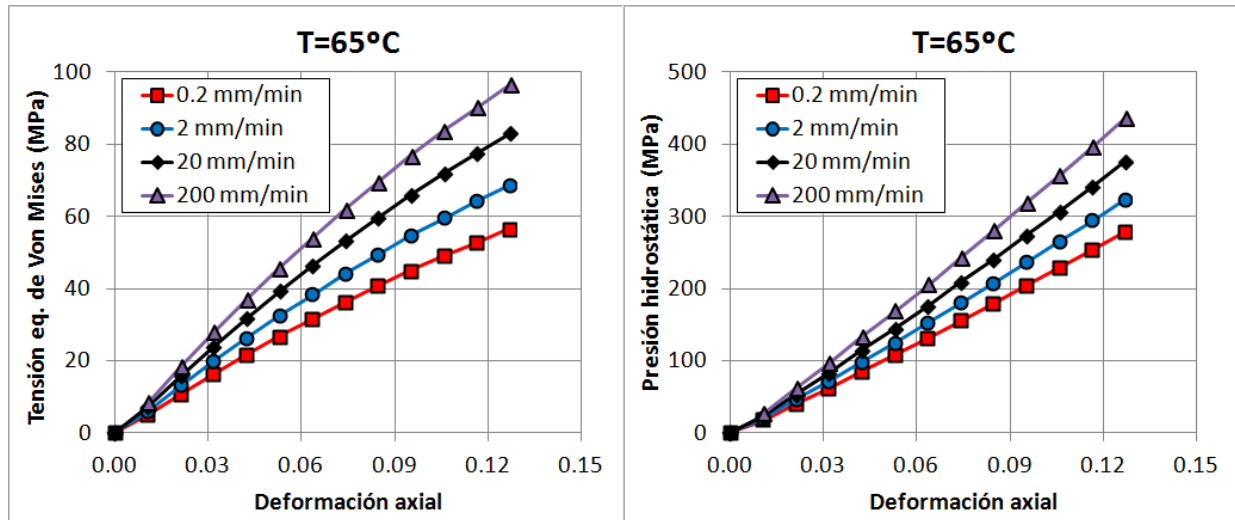


Figura 4.20: Variación de la tensión equivalente de Von Mises y de la presión hidrostática con la deformación axial ($T = 65^\circ\text{C}$).

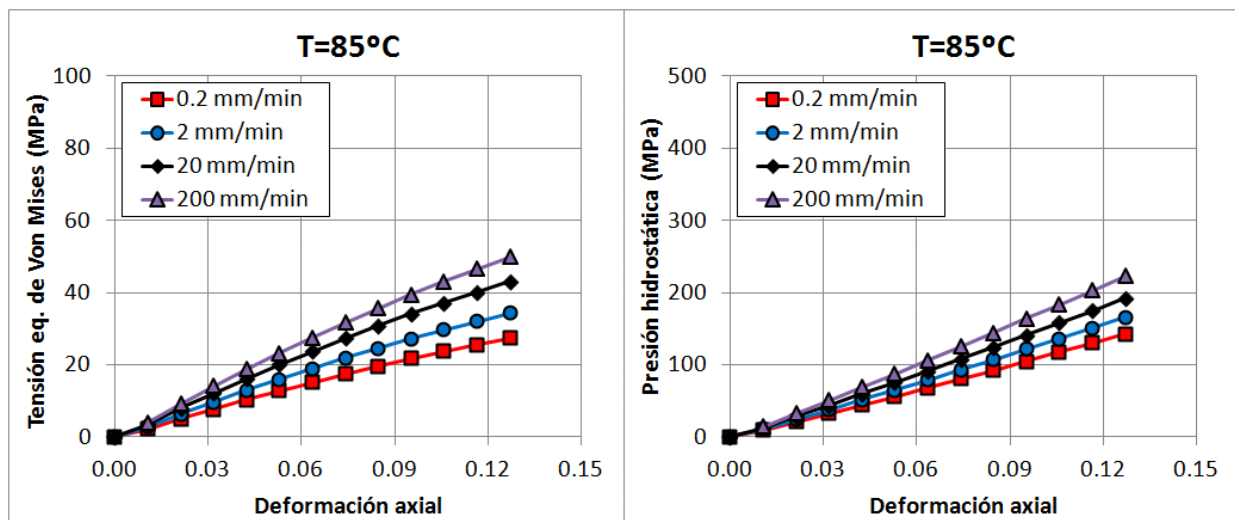


Figura 4.21: Variación de la tensión equivalente de Von Mises y de la presión hidrostática con la deformación axial ($T = 85^\circ\text{C}$).

En las gráficas anteriores se observa que, tanto la tensión equivalente de Von Mises como la presión hidrostática, presentan una alta sensibilidad a la temperatura y a la velocidad de deformación. Ambas aumentan con la velocidad de deformación y disminuyen con la temperatura.

La Figura 4.22 ilustra esta tendencia, mostrando la tensión equivalente de Von Mises y la presión hidrostática en función de la temperatura y de la velocidad, para una deformación axial arbitraria de valor 0,1. Se puede ver, además, que la sensibilidad a la velocidad de deformación disminuye con la temperatura.

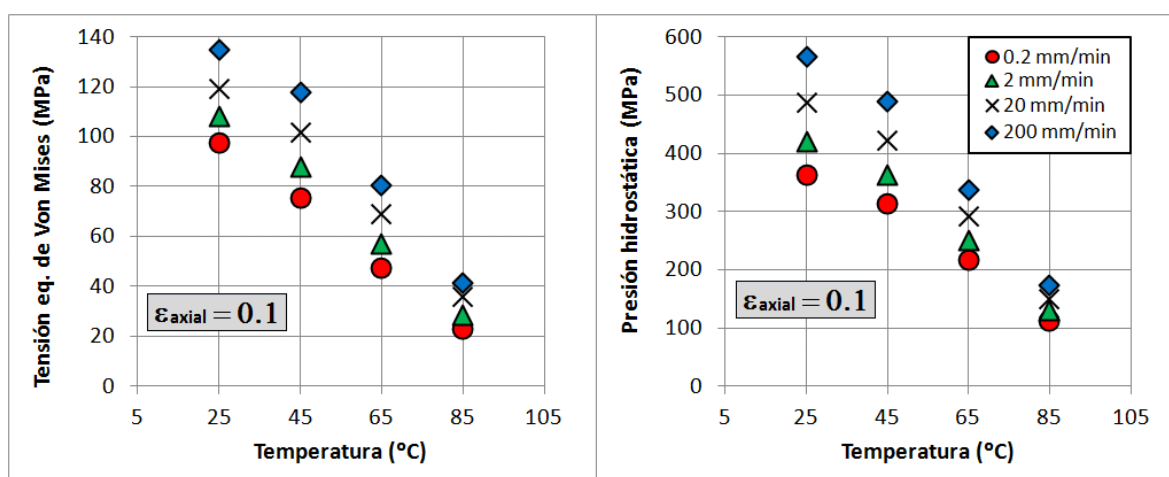


Figura 4.22: Tensión equivalente de Von Mises y presión hidrostática en función de la temperatura y de la velocidad del ensayo ($\epsilon_{axial} = 0,1$).

4.4. Ensayos de compresión-cortadura

4.4.1. Introducción

En la presente sección, se va a analizar la influencia del parámetro de Lode, ξ , en el comportamiento del PMMA. En particular, cobra especial

relevancia la función ψ del criterio de plastificación del modelo planteado (ecuación 3.9).

Teniendo en cuenta la definición del parámetro de Lode dada por la ecuación 2.15, la función ψ se puede escribir como:

$$\psi = \frac{8}{7} \left(1 - \frac{1}{8} \xi^2 \right) \quad (4.32)$$

cuyo valor se encuentra comprendido entre 1 y $8/7$, que se corresponden con tracción o compresión uniaxial, y con cortadura pura, respectivamente, como se resume en la Tabla 4.7.

Estado	ξ	ψ
Tracción uniaxial	1	1
Compresión uniaxial	-1	1
Cortadura pura	0	$8/7$

Tabla 4.7: Valores de ξ y ψ en estados de tracción y compresión uniaxiales y cortadura pura.

Por tanto, para analizar la influencia de ξ en el comportamiento del material, es necesario que el estado tensional inducido proporcione valores de ψ próximos a $8/7$, ya que de lo contrario, con ψ próxima a 1, se recuperan el modelo de Drucker-Prager para $n = 1$ o el modelo de Raghava para $n = 2$, que no tienen en cuenta el invariante J_3 .

Se concluye, por tanto, que es suficiente con que el tensor de tensiones contenga componentes tangenciales que predominen sobre las demás, lo que implica que la probeta experimente un comportamiento próximo al de cortadura pura. Bajo este contexto, se pueden encontrar en la literatura

un gran número de estudios en materiales metálicos y poliméricos, entre otros, como se mostró en el Capítulo 2.

4.4.2. Procedimiento experimental

Se han realizado ensayos de compresión-cortadura en probetas de tipo SCS con el objetivo de analizar la influencia del del invariante J_3 en el comportamiento mecánico del PMMA, a diferentes temperaturas y velocidades de sollicitación.

Se han realizado 4 repeticiones para cada combinación de velocidad (0,2, 2, 20 y 200 mm/min) y temperatura (25, 45, 65 y 85°C), obteniendo las curvas fuerza-desplazamiento. Las dimensiones de las probetas son las que se muestran en la Figura 4.23.

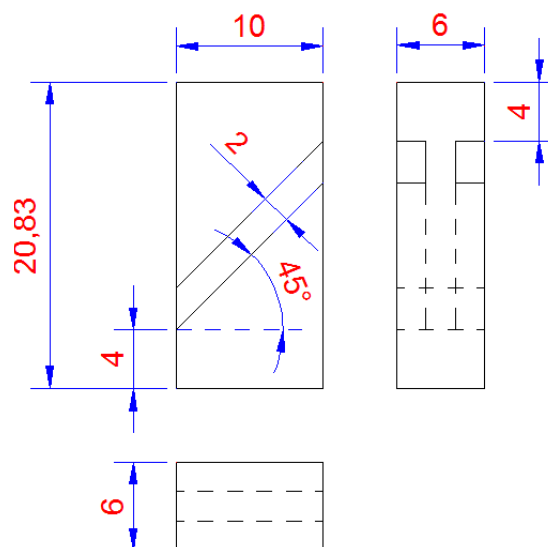


Figura 4.23: Probetas de tipo SCS utilizadas.

El ensayo consiste en aplicar una fuerza monótona creciente a compresión aplicada en las caras superior e inferior de la probeta a través de los

platos de compresión de la Máquina Universal de Ensayos, hasta rotura. Se registraron los valores de la fuerza aplicada, utilizando una célula de carga, y del desplazamiento comprimido, a través de un extensómetro LVDT. En la Figura 4.24 se muestra una probeta sin deformar y con deformación plástica posterior a un ensayo.

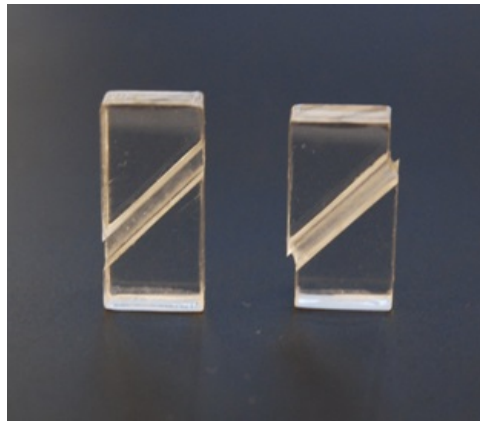


Figura 4.24: Probeta antes y después de un ensayo de compresión-cortadura.

4.4.3. Resultados

La Figura 4.25 muestra las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas en los ensayos de compresión-cortadura.

Se observa que para un desplazamiento dado la fuerza aplicada aumenta con la velocidad y disminuye con la temperatura. Estas diferencias se pueden apreciar de manera conjunta en Figura 4.26, donde se muestra la fuerza medida para un determinado desplazamiento arbitrario (2mm), en función de la temperatura y de la velocidad de sollicitación.

A la vista de los resultados, se extrae que a medida que aumenta la temperatura, la sensibilidad a la velocidad de deformación disminuye.

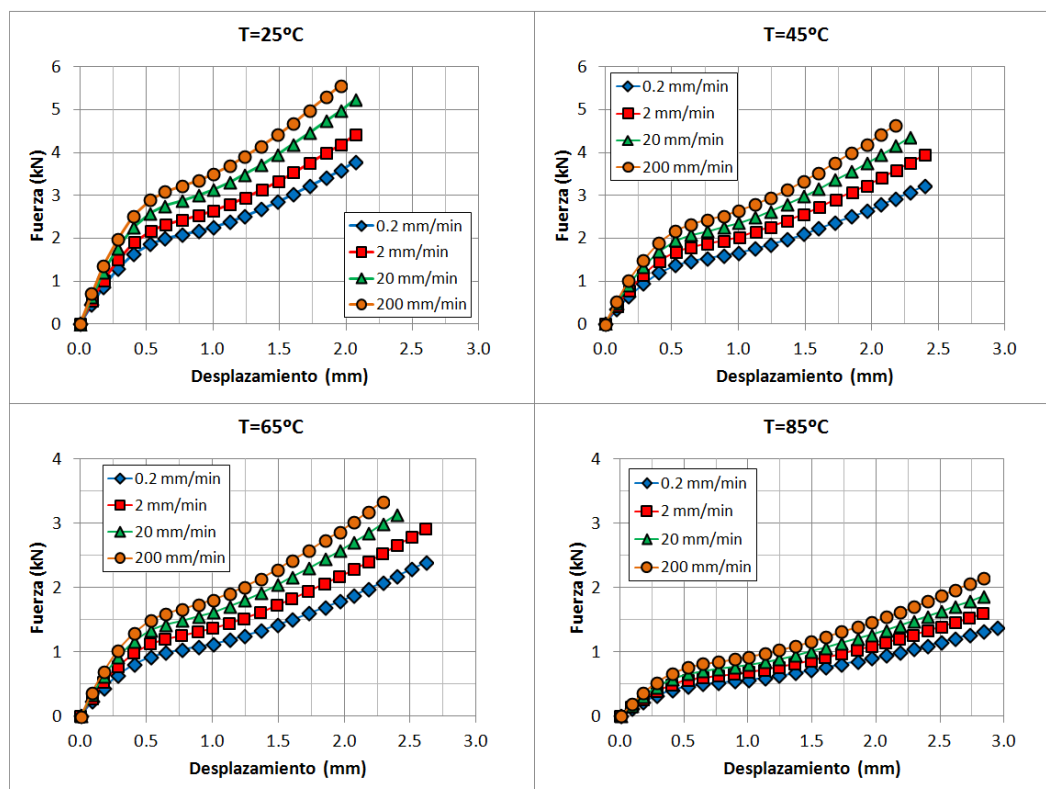


Figura 4.25: Curvas fuerza-desplazamiento obtenidas en los ensayos de compresión-cortadura.

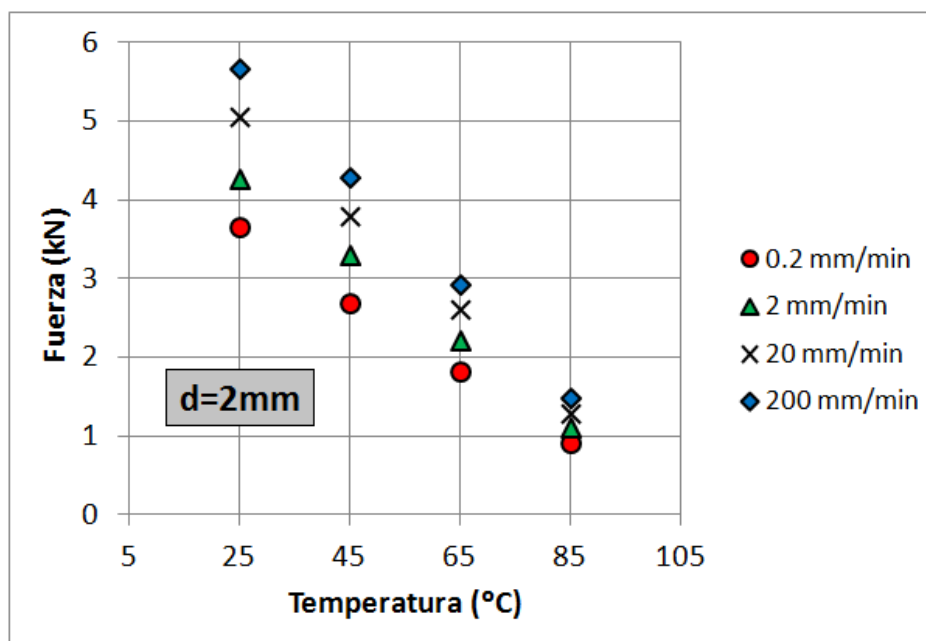


Figura 4.26: Evolución de la fuerza con la temperatura y la velocidad ($d = 2\text{mm}$).

4.5. Ensayos de validación global

En esta sección se analiza la influencia conjunta de los invariantes I_1 , J_2 y J_3 y de la velocidad de deformación en el comportamiento mecánico del PMMA, teniendo en consideración los diferentes comportamientos a tracción y a compresión que presenta el material.

4.5.1. Introducción

En secciones anteriores se han mostrado procedimientos experimentales que permiten analizar de manera independiente la influencia de los invariantes I_1 y J_3 , sin embargo, no se han considerado los posibles efectos que puedan producir ambos invariantes de manera simultánea.

Para abordar este análisis, se han realizado ensayos de Flexión en Tres Puntos en probetas en las que se ha practicado previamente un orificio circular pasante en diferentes posiciones, con el objetivo de inducir un estado tensional complejo en la probeta que incorpore estos dos invariantes, junto con J_2 , de forma significativa.

4.5.2. Procedimiento experimental

Se han ensayado en Flexión en Tres Puntos 2 tipos distintos de probeta con diferentes posiciones del orificio (ver Figura 4.27), con 2 espesores distintos cada una (10 y 20mm), situando los apoyos de manera simétrica

a una distancia un 80 % de la longitud total.

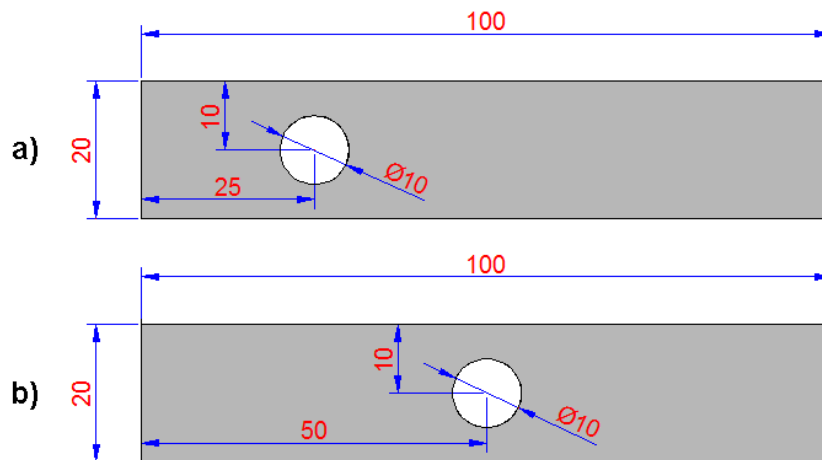


Figura 4.27: Dimensiones de los tipos de probeta considerados en los ensayos de validación (espesores 10 y 20 mm).

Los ensayos han sido realizados en una Máquina Universal de ensayos, y durante los mismos se han registrado la carga en el punto central de la probeta, F , y el desplazamiento vertical del punto de aplicación de la fuerza, d . La Figura 4.28 muestra la configuración experimental del ensayo.

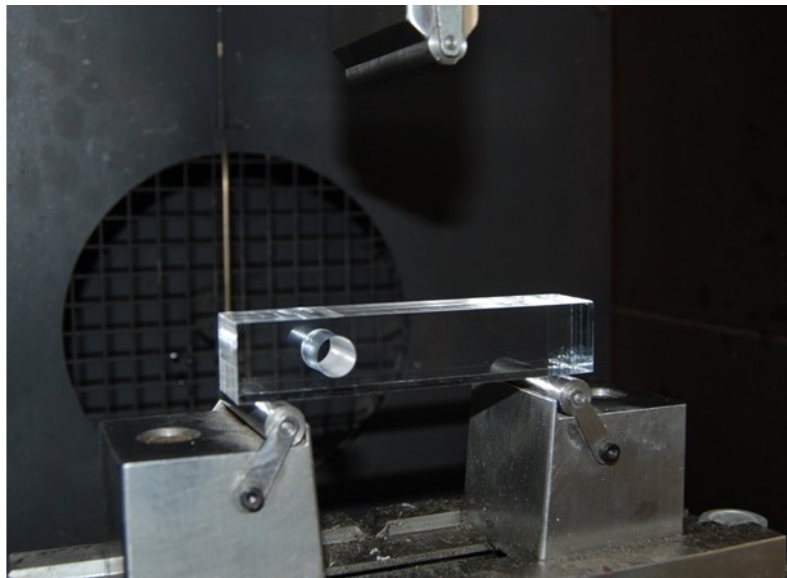


Figura 4.28: Dispositivo experimental de los ensayos de Flexión en Tres Puntos en probetas con orificio circular pasante.

Se han realizado 4 repeticiones para cada una de las velocidades del cabezal de la máquina seleccionadas, 0,02, 0,2 y 2 mm/min , siendo la temperatura constante y de valor $40^{\circ}C$ en todos los casos. La Tabla 4.8 muestra los distintos tipos de ensayo descritos.

Tipo	Geometría	Espesor (mm)	Velocidades ensayadas (mm/min)
I	(a)	10	0,02, 0,2 y 2
II	(b)	10	0,02, 0,2 y 2
III	(a)	20	0,02, 0,2 y 2
IV	(b)	20	0,02, 0,2 y 2

Tabla 4.8: Casos ensayados en Flexión en Tres Puntos ($T = 40^{\circ}C$).

4.5.3. Resultados

En la Figura 4.29 se muestran las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas en los ensayos descritos anteriormente.

Los resultados muestran de manera clara la sensibilidad del material a la velocidad de deformación, observándose que la fuerza necesaria para producir un desplazamiento dado aumenta con la velocidad de deformación.

La Figura 4.30 muestra una comparativa entre los resultados obtenidos, donde se observa que la fuerza obtenida para un espesor $e = 20mm$ es aproximadamente el doble que para $e = 10mm$, como era de esperar. Se comprueba también que las fuerzas aplicadas para un desplazamiento dado son similares para orificio lateral y centrado, para un mismo espesor y misma velocidad de ensayo.

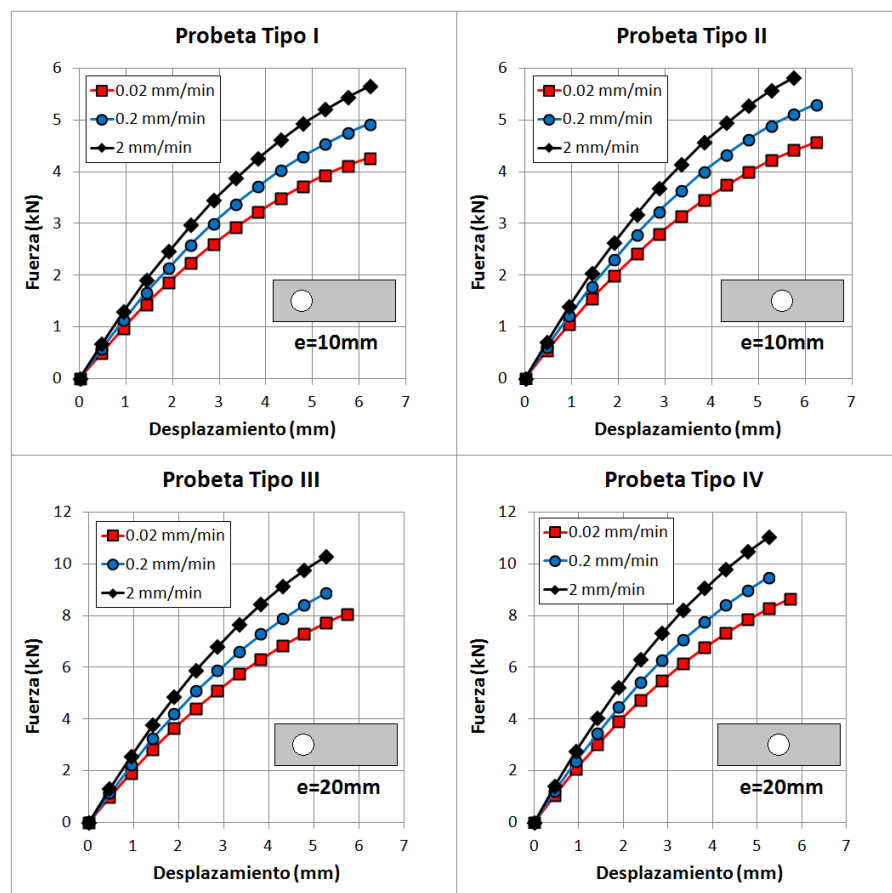


Figura 4.29: Curvas fuerza-desplazamiento experimentales correspondientes a los ensayos de Flexión en Tres Puntos.

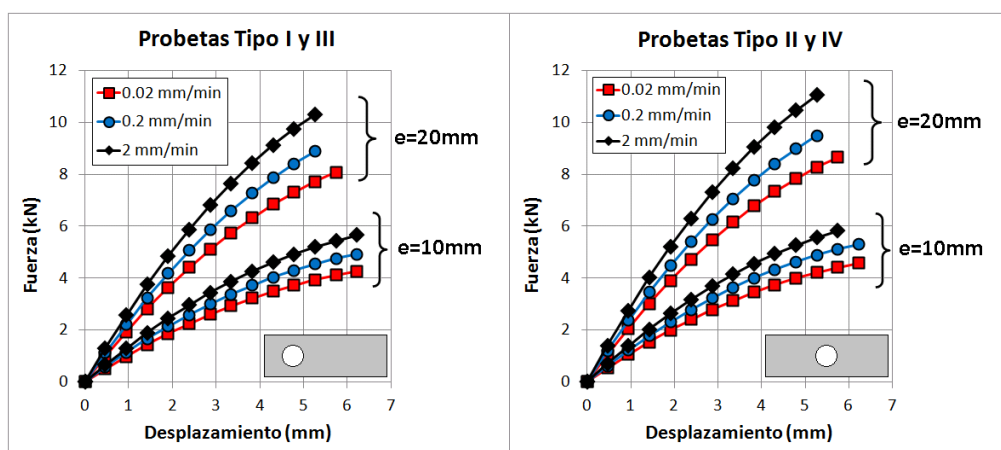


Figura 4.30: Comparativa de las curvas fuerza-desplazamiento experimentales correspondientes a los ensayos de Flexión en Tres Puntos.

Capítulo 5

Calibración y validación del modelo propuesto

En este capítulo se presentan la calibración y la validación del modelo propuesto, contrastando los resultados experimentales con sus correspondientes predicciones numéricas.

5.1. Introducción

El el presente Capítulo se va a ajustar el modelo de comportamiento propuesto, calculando los valores de n y de N que se corresponden con los resultados experimentales expuestos en el Capítulo 4. Para ello, se va a utilizar una subrutina de usuario de tipo UMAT para introducir el modelo en el código comercial de Elementos Finitos ABAQUS.

Posteriormente se realizará la validación, comparando los resultados experimentales obtenidos en los ensayos de Flexión en Tres Puntos descritos en el Capítulo 4 con sus correspondientes numéricos.

Parámetros del modelo numérico desarrollado en el Capítulo 3:

A continuación se recuerdan las ecuaciones más relevantes del modelo numérico, junto con los valores utilizados para los distintos parámetros que aparecen en ellas (véase la Tabla 4.1), habiéndose considerado éstos constantes e independientes de la temperatura y de la velocidad de deformación:

- Relación entre tensiones y deformaciones:

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\epsilon} - C : \dot{\epsilon}^p - C : \dot{\epsilon}^\theta \quad (5.1)$$

$$C = C(E, \nu) \quad (5.2)$$

El módulo de Young, E , fue obtenido de la caracterización experimental del material, en función de la temperatura y de la velocidad

de deformación. El coeficiente de Poisson medido es 0,41.

- Evolución de la deformación plástica y de la deformación por incremento térmico:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \dot{\epsilon}^\theta = \alpha \dot{\theta} \mathbf{1} \quad (5.3)$$

donde el coeficiente de dilatación térmica, α , se ha tomado $7 \pm 0.5^\circ C^{-1}$.

- Variación de la densidad:

$$\dot{\rho} = -\rho \dot{\epsilon} : \mathbf{1} \quad (5.4)$$

La densidad inicial utilizada es $\rho_0 = 1190 \text{ kg/m}^3$.

- Variación de la temperatura:

$$\begin{cases} \rho C_p \dot{\theta} = \beta \sigma : \dot{\epsilon}^p & \text{si } \dot{\epsilon} \approx \dot{\epsilon}_0 \\ \dot{\theta} = 0 & \text{si } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_0 \end{cases} \quad (5.5)$$

El calor específico a presión constante utilizado es $C_p = 1450 \text{ J/Kg}^\circ C$ (véase la Tabla 4.1). El parámetro de Taylor-Quinney para el PMMA ha sido obtenido de la bibliografía [2], $\beta = 0,5$.

- Criterio de plastificación:

$$\phi(\sigma) = \psi^N \left(\frac{\nabla \overline{3J_2}}{\sigma_t} \right)^n + \frac{m^n - 1}{m + 1} \frac{I_1}{\sigma_t} - \frac{m - m^{n-1} + 1}{m + 1} \quad (5.6)$$

$$\psi = \frac{8}{7} \left(1 - \frac{27 J_3^2}{32 J_2^3} \right), \quad m = \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \quad (5.7)$$

$$\sigma_t = \sigma_t(\bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}^p, \theta), \quad \sigma_c = \sigma_c(\bar{\epsilon}^p, \dot{\epsilon}^p, \theta) \quad (5.8)$$

donde las tensiones de fluencia a tracción y a compresión, σ_t y σ_c , respectivamente, han sido obtenidos de la caracterización experimental.

Los parámetros n y N recogen, respectivamente, la influencia de los invariantes I_1 y J_3 en el comportamiento del material. Ghorbel utilizó $N = 1$ para incorporar el efecto de J_3 , mientras que con $N = 0$ anuló esta dependencia. Concluyó que para la mayoría de polímeros considerados en su estudio, el parámetro n tomaba los valores enteros 1 ó 2, concretamente, afirmó que $n = 2$ reproducía aceptablemente el comportamiento elastoplástico de la mayoría de los polímeros, en particular del PMMA.

- Equivalencia del trabajo plástico:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \sigma_y \dot{\epsilon}^p \quad (5.9)$$

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_c & \text{si } I_1 < 0 \\ \frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_c) & \text{si } I_1 = 0 \\ \sigma_t & \text{si } I_1 > 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

En el presente capítulo, se van a calibrar los parámetros n y N a partir de los ensayos de compresión confinada y de compresión-cortadura, para posteriormente validar el modelo utilizando los resultados experimentales de los ensayos de Flexión en Tres Puntos.

5.2. Determinación del valor del parámetro n

Los ensayos de compresión confinada han sido simulados numéricamente con el objetivo de analizar cómo influye n en el modelo de comportamiento. Como se justificó anteriormente, los efectos del invariante J_3 cobran especial importancia cuando los mecanismos de deformación predominantes son de cortadura, y no son relevantes en compresión confinada, por

tanto los resultados serán similares si se toma $N = 0$ ó $N = 1$. Se ha tomado $N = 0$, hecho que reduce el tiempo computacional.

Se ha utilizado un modelo axilsimétrico que tiene en cuenta la simetría del problema, y cuyo mallado utiliza elementos CAX4H de 4 nodos, siendo su tamaño característico de $0,2\text{ mm}$. El acero del cilindro de confinamiento y de las tapas auxiliares se ha modelizado como un material elástico y lineal, con coeficiente de Poisson $0,33$ y módulo de Young dependiente de la temperatura y la velocidad de deformación, según mostró la Tabla 4.6.

En la Figura 5.1 se muestra el modelo utilizado.

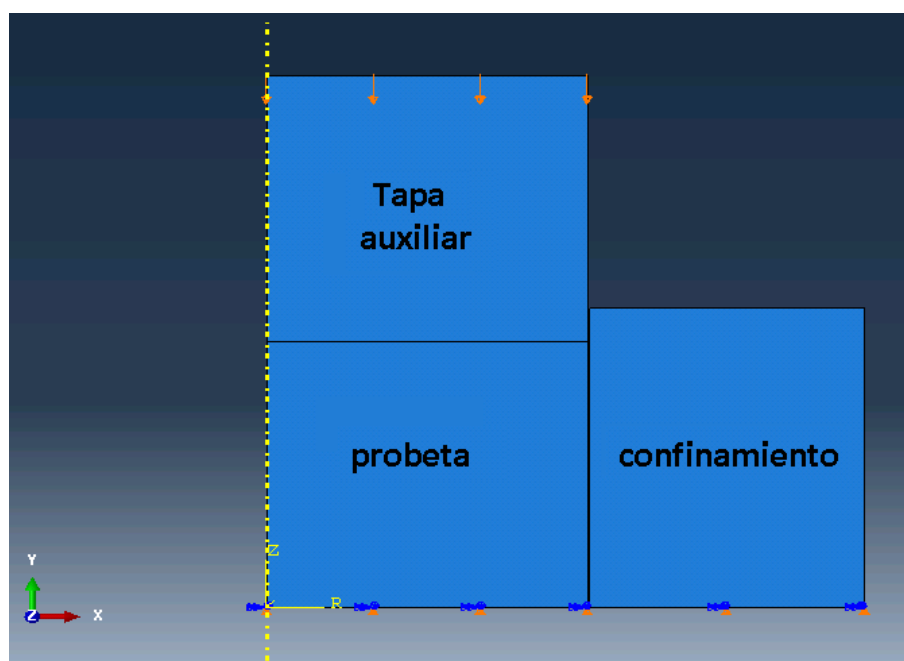


Figura 5.1: Condiciones de contorno y simetrías utilizadas en el modelo numérico.

Se ha impuesto un desplazamiento axial de compresión en cada tapa que, como se ha comprobado previamente, genera tensiones en el confinamiento inferiores al límite elástico, evitando así la plastificación del mismo.

Se han tenido en cuenta diferentes temperaturas y velocidades de aplicación de la carga, y se han considerado distintos valores de n , con el objetivo de calcular la tensión de Von Mises y la presión hidrostática presentes en la probeta en cada caso y compararlas con las obtenidas a partir de los ensayos. Los casos analizados se corresponden con velocidades de aplicación de la carga 0,2, 2, 20 y 200 mm/min , y con las temperaturas 25, 45, 65 y 85°C, que coinciden con las ensayadas.

En todos los casos, se ha observado que la presión hidrostática es prácticamente independiente del valor de n , por tanto esta variable tensional no se ha utilizado en la calibración de dicho parámetro. La Figura 5.2 ilustra este hecho, para una temperatura de 45°C y una velocidad de 2 mm/min .

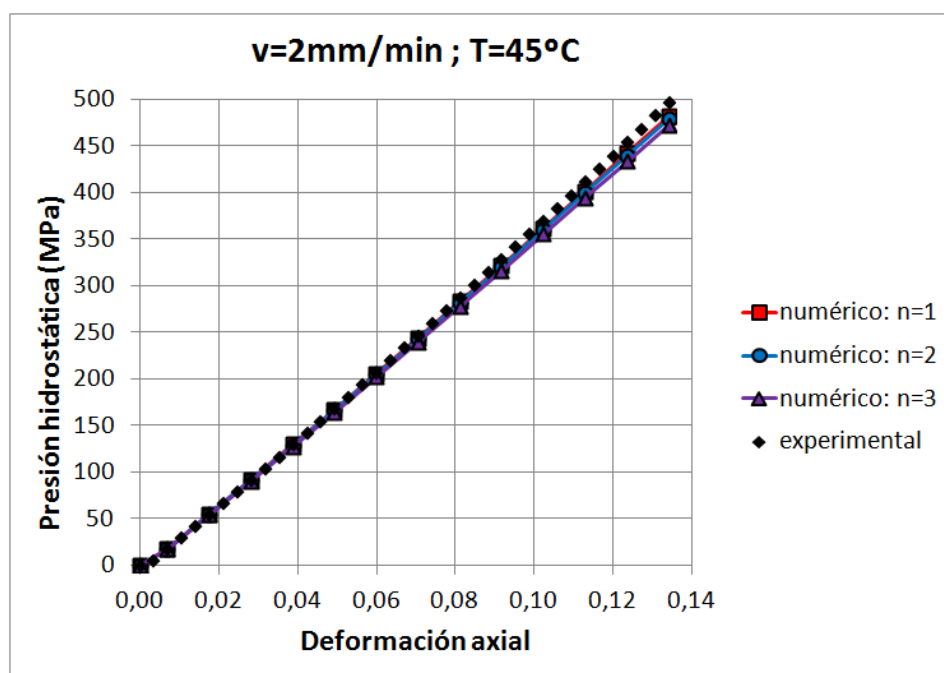


Figura 5.2: Evolución de la presión hidrostática con la deformación axial, para $n = 1, 2, 3$, mostrando también la correspondiente experimental ($v = 2mm/min$, $T = 45°C$).

Primeramente, se han analizado las velocidades 0,2, 2 y 20 mm/min , que se corresponden con velocidades de deformación inferiores a $0,1 s^{-1}$, no siendo necesario tener en cuenta posibles incrementos térmicos por defor-

mación plástica. Posteriormente, se muestra la velocidad 200 mm/min , que supone una velocidad de deformación de valor $0,2 \text{ s}^{-1}$, y que sí tiene en cuenta este efecto.

Velocidades 0,2, 2 y 20 mm/min :

A continuación, se muestra la evolución de la tensión equivalente de Von Mises frente a la deformación axial, obtenidas numérica y experimentalmente, para las distintas temperaturas. En las Figuras 5.3-5.5 se muestran las curvas correspondientes, para valores de n de 1, 2 y 3.

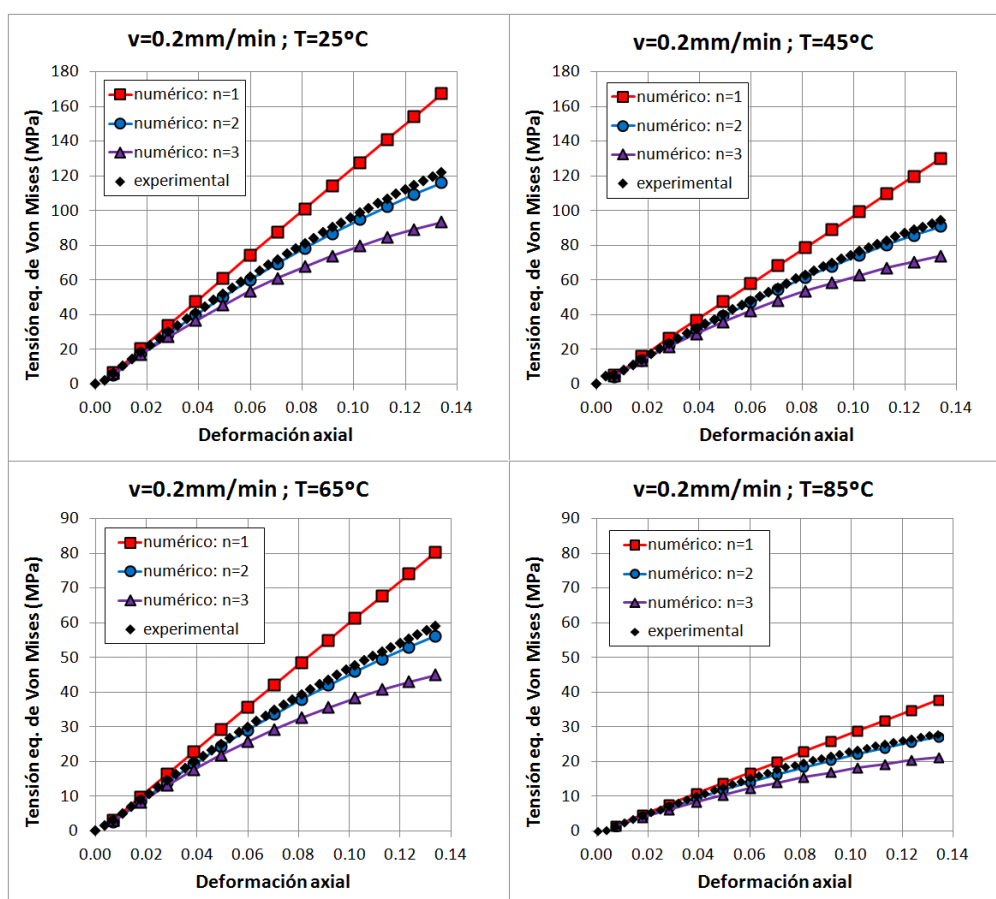
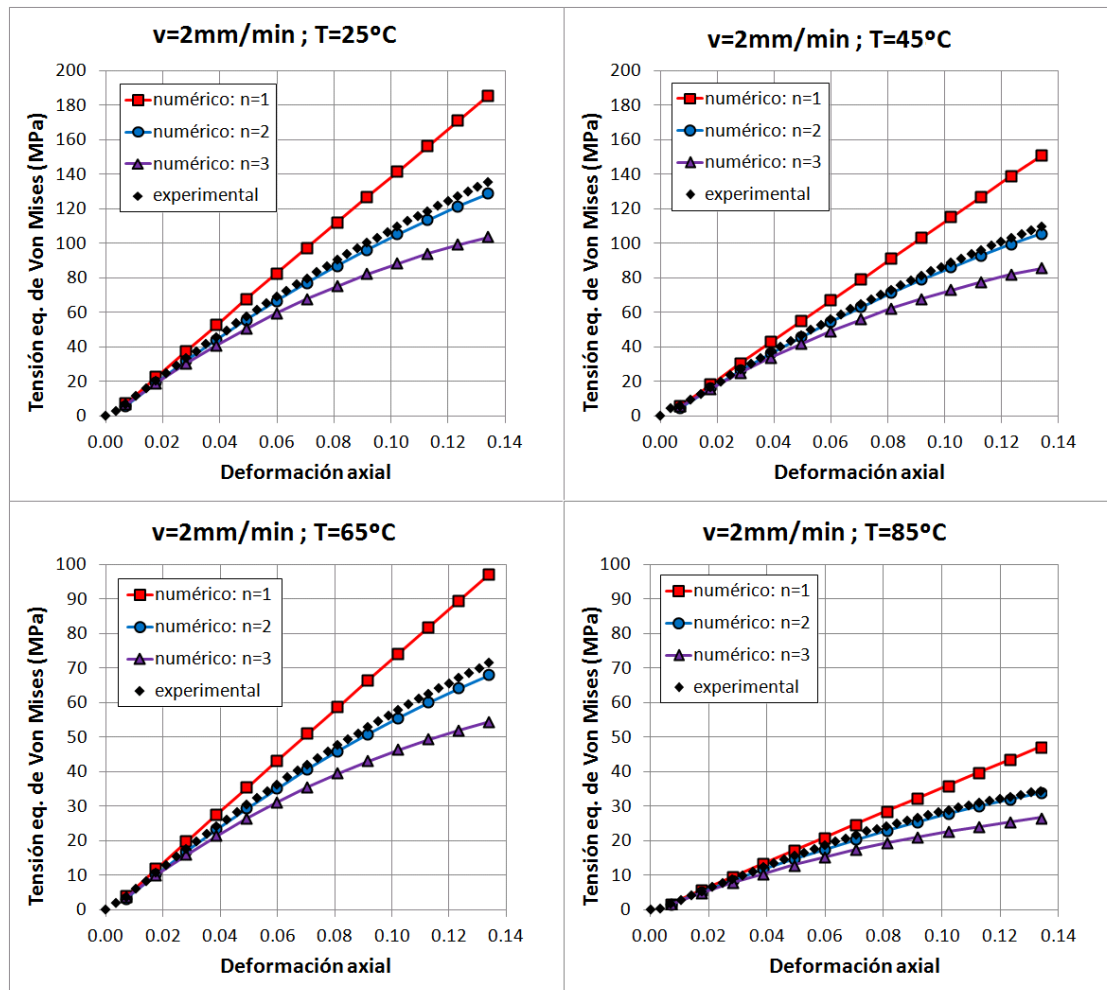


Figura 5.3: Tensión equivalente frente a deformación axial, $v = 0,2 \text{ mm/min}$

Figura 5.4: Tensión equivalente frente a deformación axial, $v = 2 \text{ mm/min}$

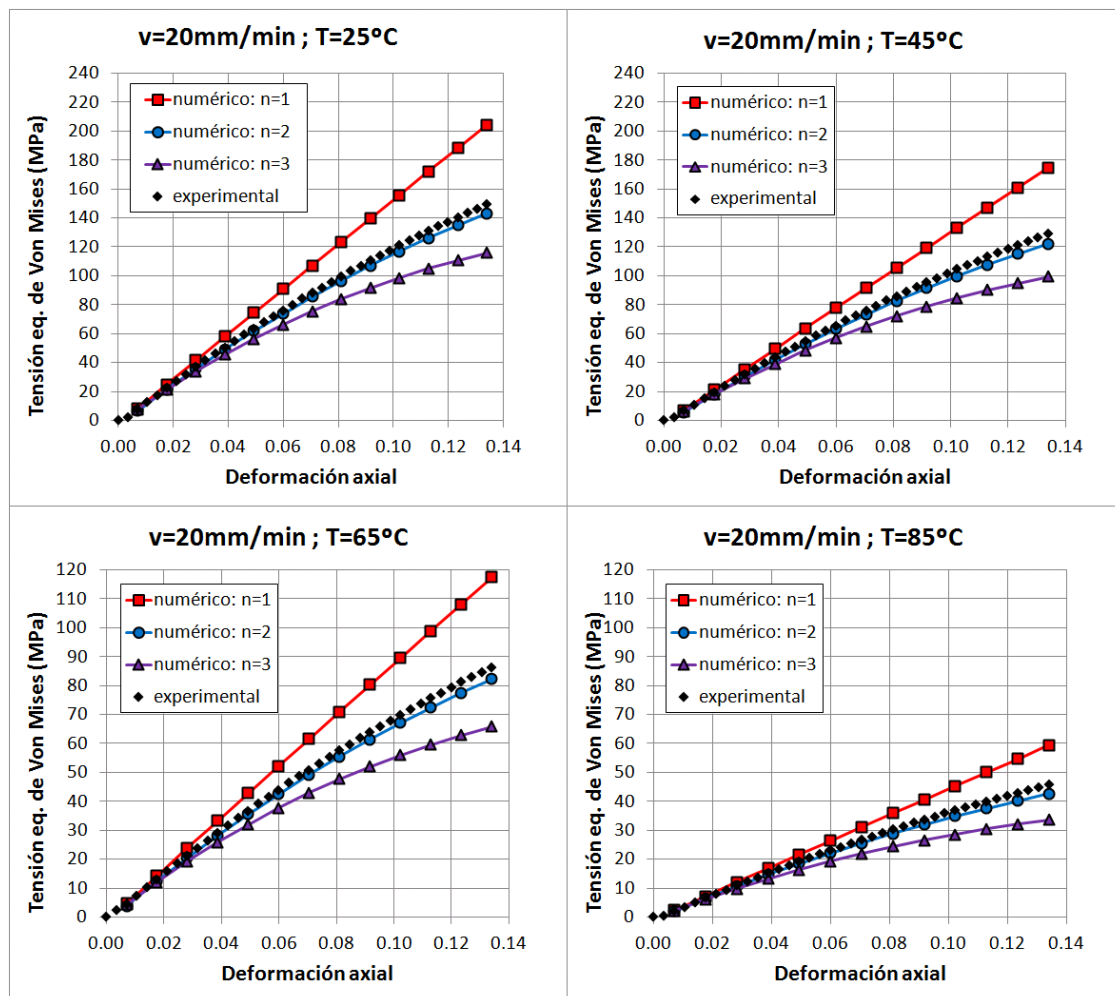


Figura 5.5: Tensión equivalente frente a deformación axial, $v = 20\text{ mm/min}$

Los resultados obtenidos muestran, en todos los casos, que la curva numérica $n = 1$ es lineal y se encuentra por encima de su correspondiente experimental, mientras que $n = 2$ y $n = 3$ se sitúan por debajo y no son lineales. Asimismo, se observa que la tensión equivalente de Von Mises para $n = 2$, valor recomendado por Ghorbel, representa un error de aproximadamente un 5 % respecto a la obtenida en los ensayos.

Velocidad 200mm/min:

Para el caso particular de 200 mm/min, que equivale a una velocidad de deformación aproximada de valor $0,2 s^{-1}$, el proceso de deformación es suficientemente rápido como para que pueda tenerse en cuenta la proporción de trabajo plástico que se transforma en incremento térmico.

La Figura 5.6 muestra la diferencia de considerar calentamiento por deformación plástica frente a no considerarlo, mostrando la variación de la tensión equivalente de Von Mises con la deformación axial para las temperaturas de estudio.

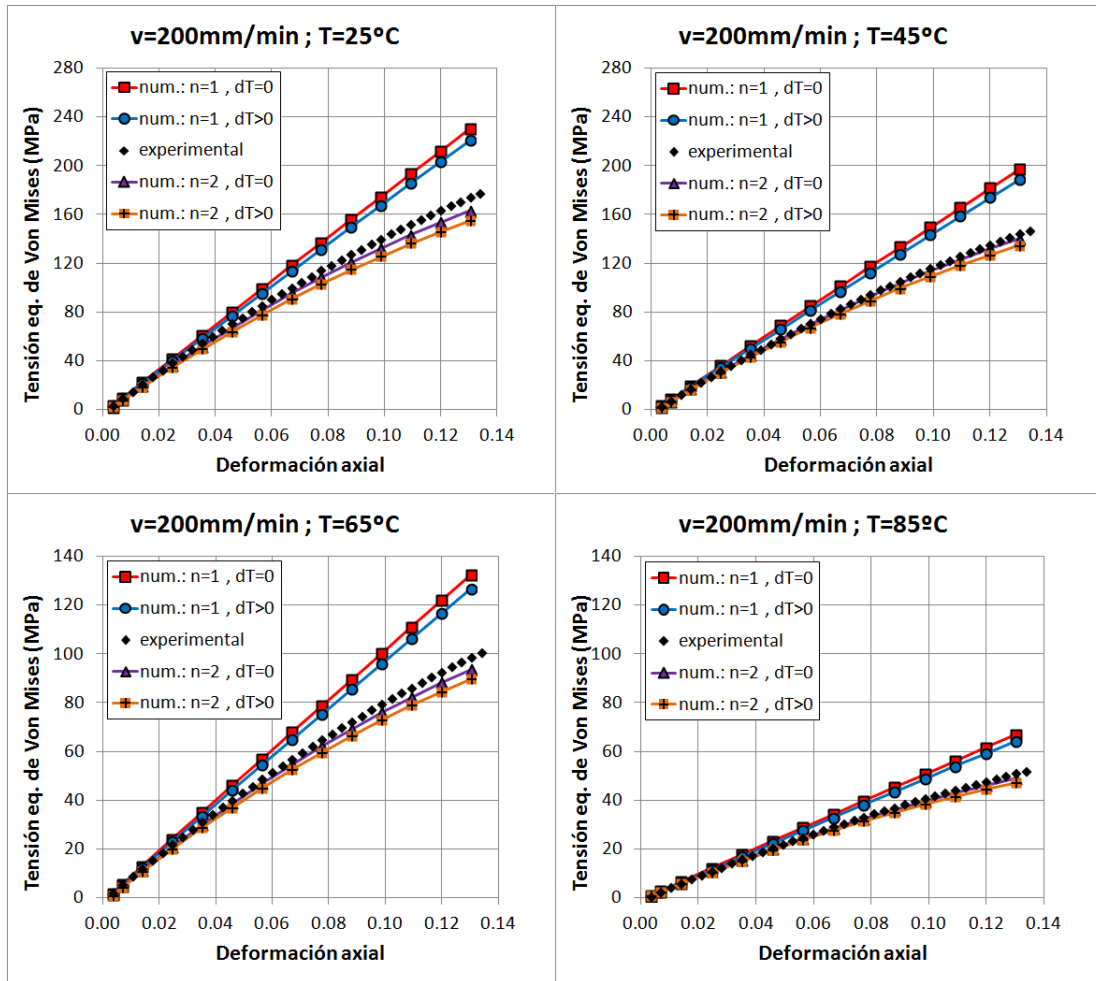


Figura 5.6: Tensión equivalente frente a deformación axial, $v = 200 \text{ mm/min}$

Se observa que las curvas para $n = 1$ se sitúan, como ocurría para las velocidades inferiores, por encima de su correspondiente experimental, mientras que para $n = 2$ se encuentran por debajo. Además, las curvas numéricas que tienen en cuenta calentamiento por deformación plástica se sitúan alrededor de un 5 % por debajo de las que no lo consideran.

A la vista de los resultados, se concluye que en todos los casos analizados la curva numérica para $n = 2$ se aproxima cualitativamente bien a los resultados experimentales, afirmación que se corresponde con la realizada por *Ghorbel*.

Las curvas numéricas que expresan la tensión equivalente de Von Mises frente a la deformación axial para distintos valores de n , permiten calibrar el valor n que ajusta el modelo al correspondiente experimental.

Se ha comprobado que el valor $n = 1,85$ proporciona errores menores de 3% en todos los casos considerados sin calentamiento por deformación plástica. La Figura 5.7 muestra, a modo de ejemplo, el ajuste para una temperatura de 45°C y una velocidad de 20 mm/min .

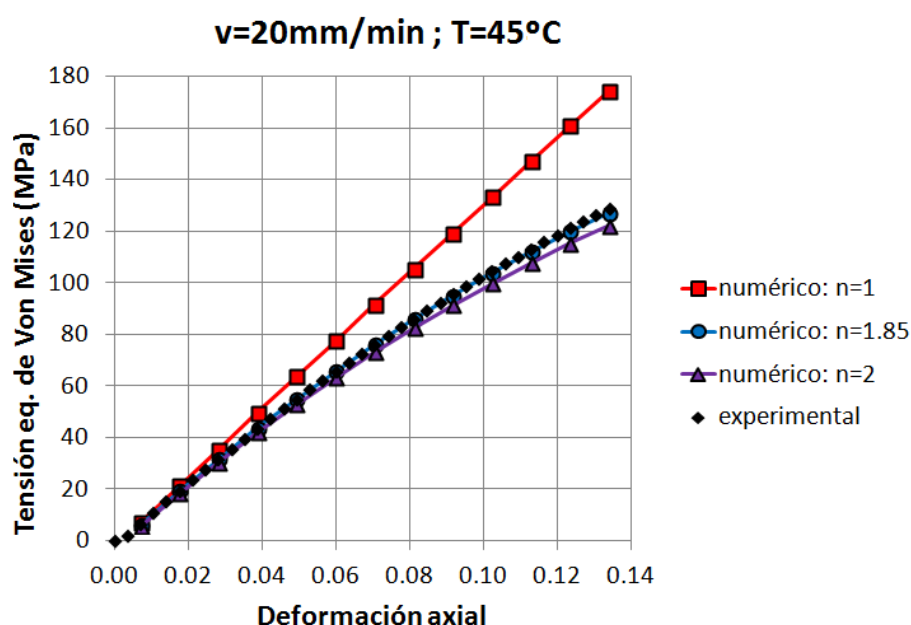


Figura 5.7: Tensión equivalente frente a deformación axial, 45°C , 20 mm/min

Con respecto a la consideración de incremento térmico por deformación plástica, es decir, para los casos de velocidad 200 mm/min , se han calculado las diferencias entre las predicciones numéricas con y sin calentamiento, utilizando $n = 1,85$, y las curvas experimentales. Los errores no superan el 3% para el modelo que no considera calentamiento por deformación plástica, mientras que para el modelo que tienen en cuenta incremento de temperatura en la probeta las diferencias máximas son de un 2,5%. Por tanto, se concluye que el modelo numérico mejora ligeramente sus predicciones si se tiene en cuenta incremento térmico por deformación plástica.

La Figura 5.8 muestra esta mejora para una temperatura de 25°C .

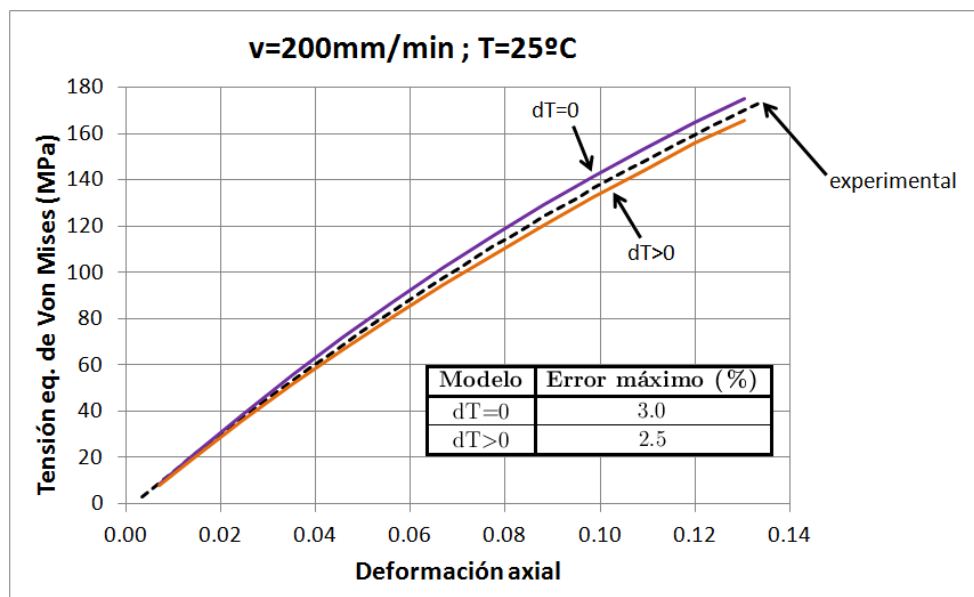


Figura 5.8: Tensión equivalente frente a deformación axial, 25°C , $200\text{mm}/\text{min}$, $n = 1,85$

5.3. Efecto del parámetro de Lode

Se han realizado simulaciones que reproducen numéricamente los ensayos de compresión-cortadura. Se ha utilizado $n = 1,85$, obtenido anteriormente. El tiempo computacional se ha reducido teniendo en cuenta la simetría del problema, y el mallado utiliza elementos C3D8H de 8 nodos, siendo su tamaño característico $0,5\text{mm}$. Se ha impuesto un desplazamiento axial a compresión en los extremos de la probeta, que va a inducir un estado tensional homogéneo de cortadura pura en la zona entallada, hecho que maximiza el valor de la función ψ del criterio de plastificación considerado en el modelo de comportamiento, y que permite evaluar su influencia. La Figura 5.9 muestra las condiciones de contorno del modelo.

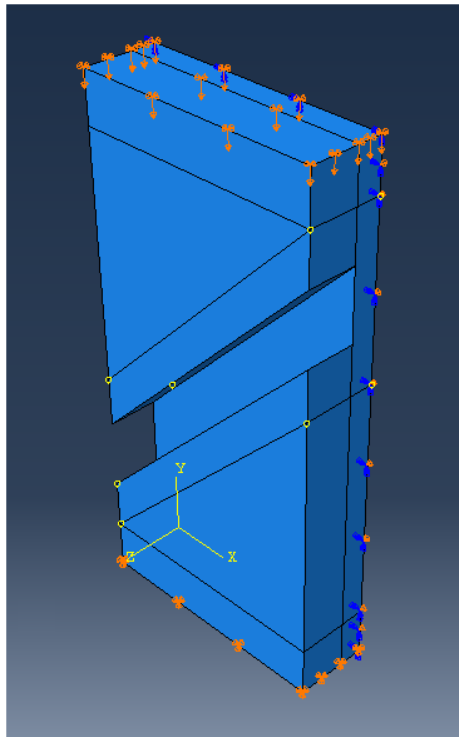


Figura 5.9: Condiciones de contorno del modelo numérico de los ensayos de compresión-cortadura.

Como se puede observar, sobre la probeta se aplica un desplazamiento vertical en la superficie superior de la probeta, mientras que la cara inferior ve restringido su desplazamiento en esa dirección.

En el análisis se han comparado, para cada temperatura y velocidad de ensayo, la curva fuerza-desplazamiento experimental con su correspondiente numérica obtenida, y que considera la influencia del invariante J_3 en el criterio de plastificación ($N = 1$). Adicionalmente, también se muestran los resultados para $N = 0$, es decir, anulando el efecto de J_3 en el comportamiento del material.

5.3.1. Comparación de resultados numéricos y experimentales

En las Figuras 5.10-5.13 se muestran las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas experimentalmente, y su comparación con las correspondientes numéricas. En este caso no se tiene en cuenta calentamiento por deformación plástica, hecho que se analizará más adelante.

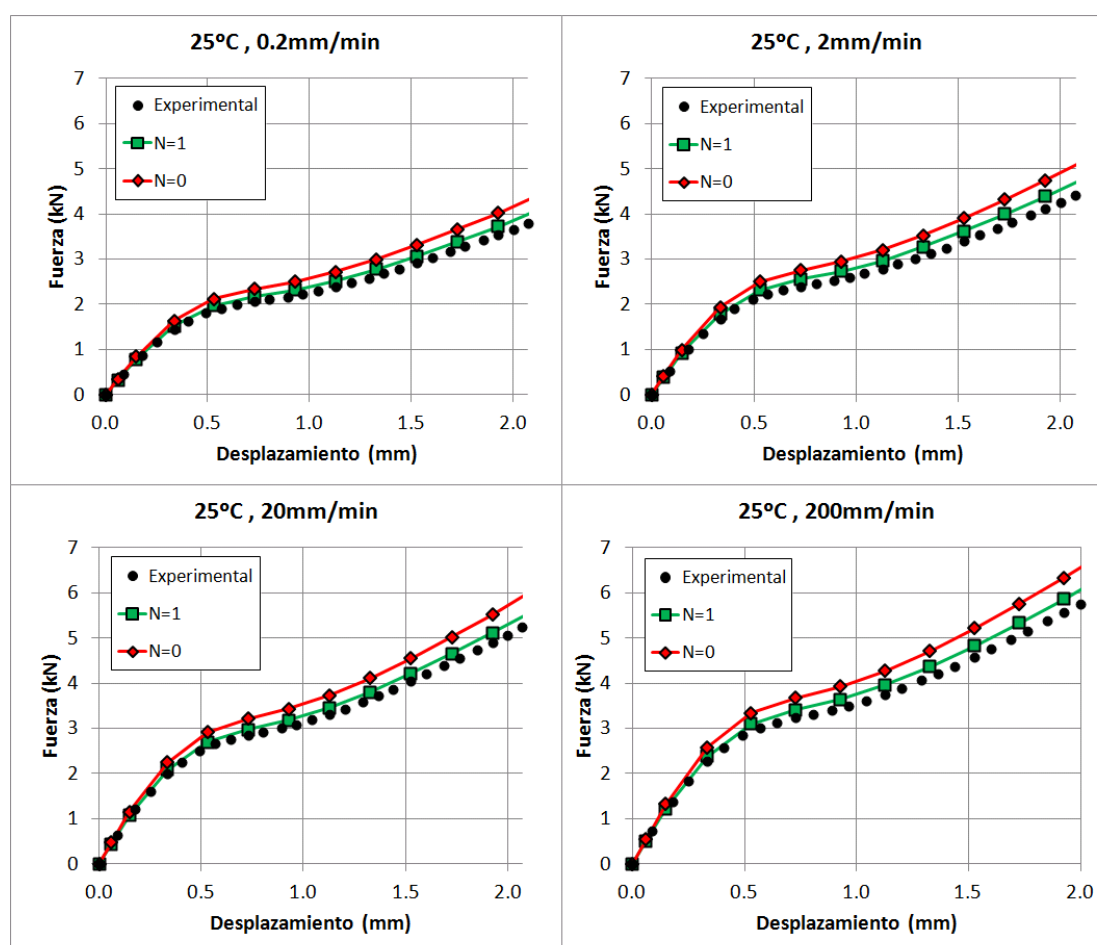


Figura 5.10: Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para $T = 25^{\circ}\text{C}$.

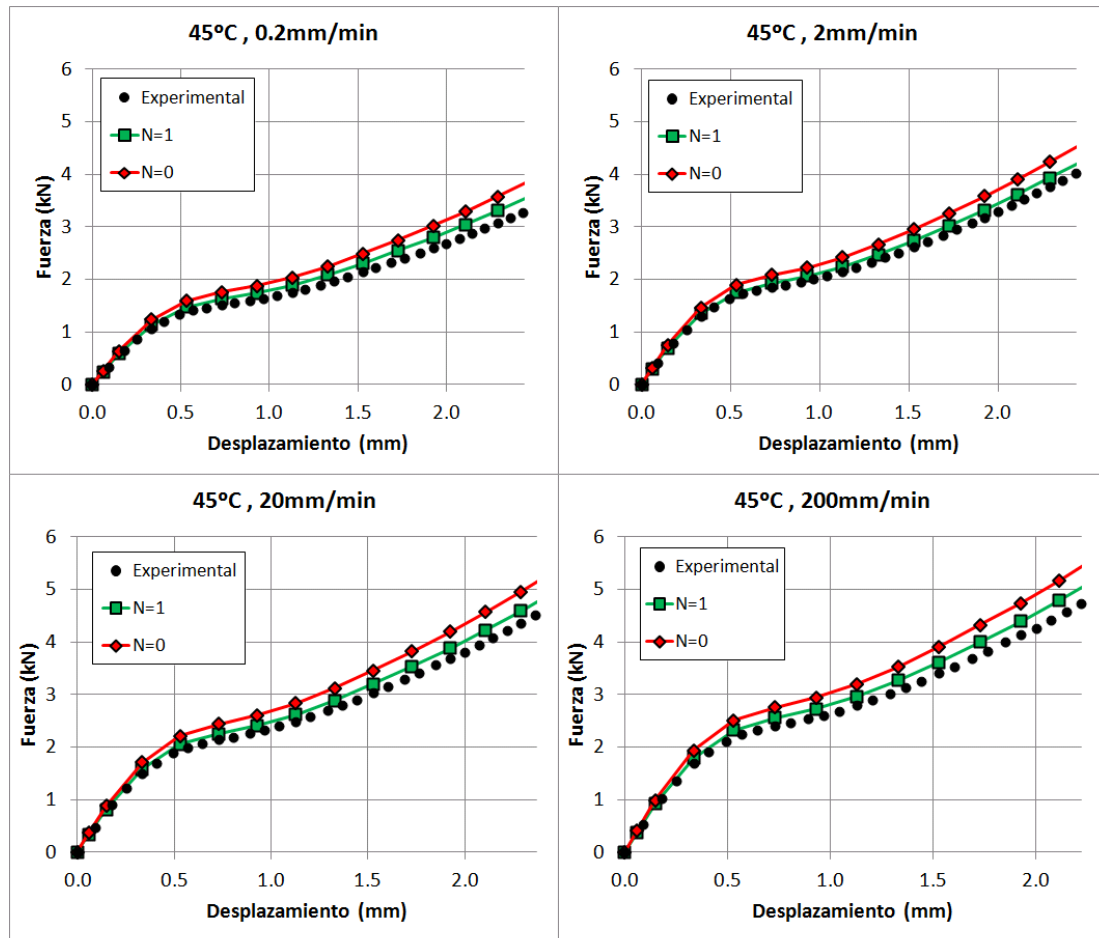


Figura 5.11: Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para $T = 45^{\circ}\text{C}$.

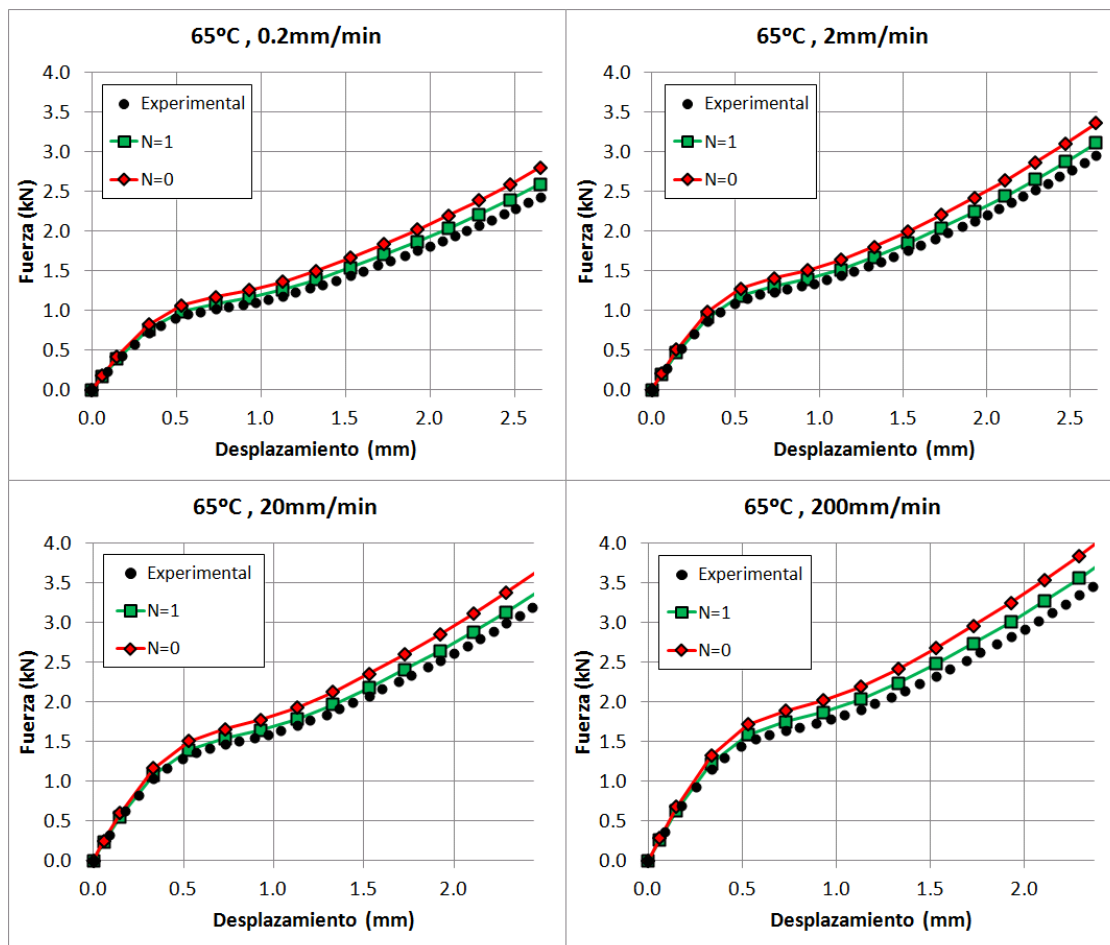


Figura 5.12: Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para $T = 65^{\circ}\text{C}$.

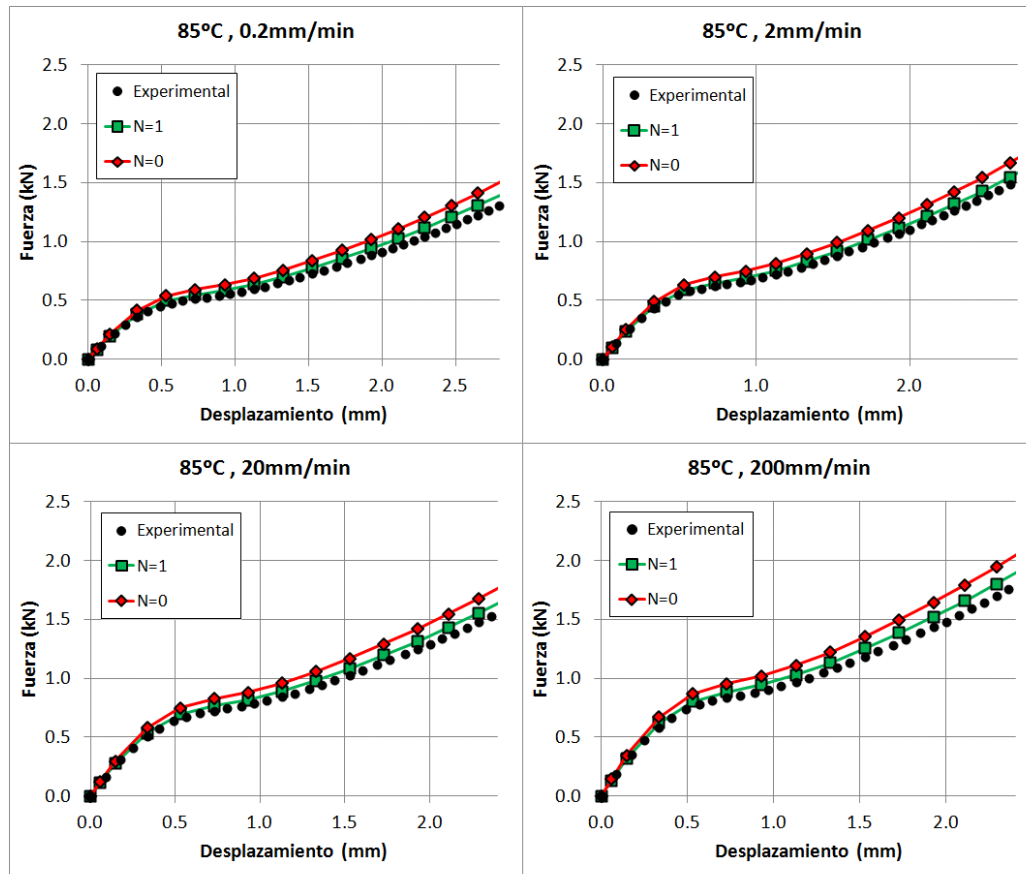


Figura 5.13: Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para $T = 85^{\circ}C$.

En todos los casos se observa que los resultados numéricos que tienen en cuenta el invariante J_3 ($N = 1$) se aproximan más a los experimentales que los obtenidos cuando esta influencia es anulada ($N = 0$).

En el caso particular de 200 mm/min , que equivale a una velocidad de deformación superior a $0,1 \text{ s}^{-1}$ comprobada numéricamente, se tendrá en cuenta incremento térmico en la probeta. Cabe resaltar que para las velocidades inferiores a esta última, también se ha verificado que no se alcanza la velocidad de deformación de $0,1 \text{ s}^{-1}$.

Velocidad 200 mm/min

En las Figuras 5.14-5.15 se comparan, para cada valor de temperatura inicial, la curva experimental frente a la numérica con y sin calentamiento por deformación plástica, teniendo en cuenta en ambas el invariante J_3 en el modelo utilizado.

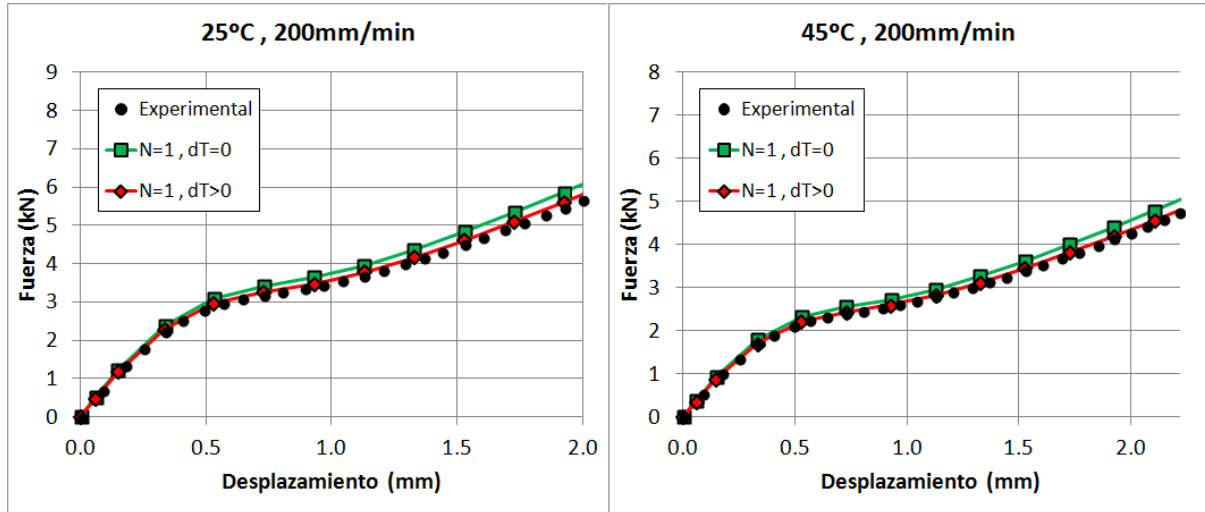


Figura 5.14: Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para 200 mm/min , y temperaturas 25°C y 45°C , con y sin calentamiento por deformación plástica

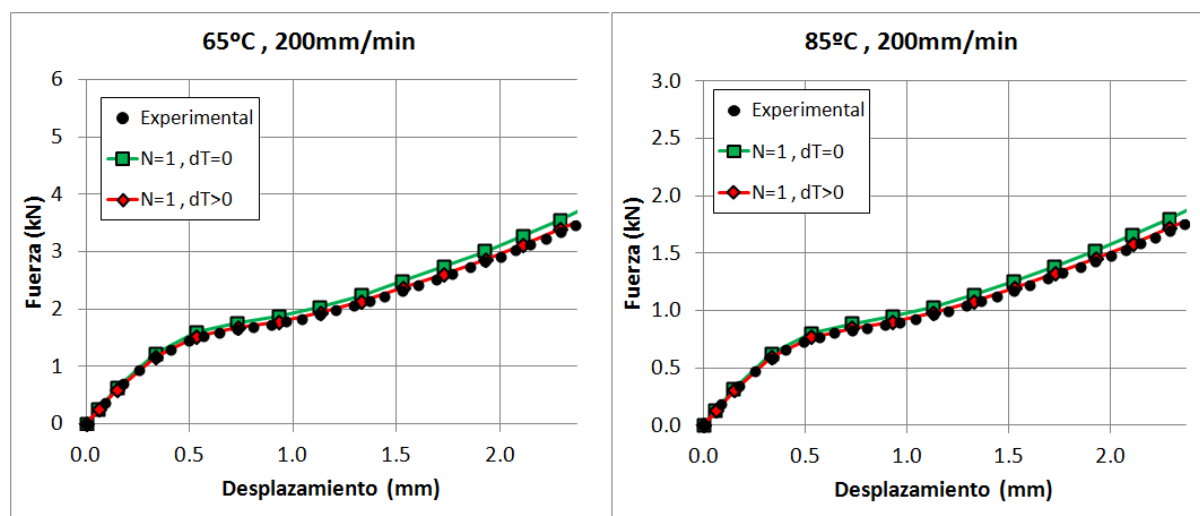


Figura 5.15: Curvas fuerza-desplazamiento numéricas y experimental para 200 mm/min , y temperaturas 65°C y 85°C , con y sin calentamiento por deformación plástica

Se comprueba que para una velocidad de 200 mm/min la predicción numérica mejora si se tiene en cuenta calentamiento por deformación plástica, siendo el error próximo a un 5 %.

Los resultados muestran que las curvas numéricas se aproximan más a la experimental si se tiene en cuenta el invariante J_3 en el modelo de comportamiento utilizado, es decir, si se toma $N = 1$. En todos los casos, se obtienen diferencias menores del 10 % entre la curva experimental y la numérica con influencia de J_3 .

5.3.2. Influencia del parámetro n en los ensayos de compresión-cortadura

A continuación, se analiza la influencia que produce el parámetro n en los resultados obtenidos en un ensayo de compresión-cortadura. Para ello,

se ha considerado el caso con temperatura 45°C y velocidad 2 mm/min . Se han realizado simulaciones numéricas para $n = 1,75$ y $n = 2,00$, y comparado sus curvas fuerza-desplazamiento, obteniendo diferencias en torno a un $0,8\%$, como puede apreciarse en la Figura 5.16.

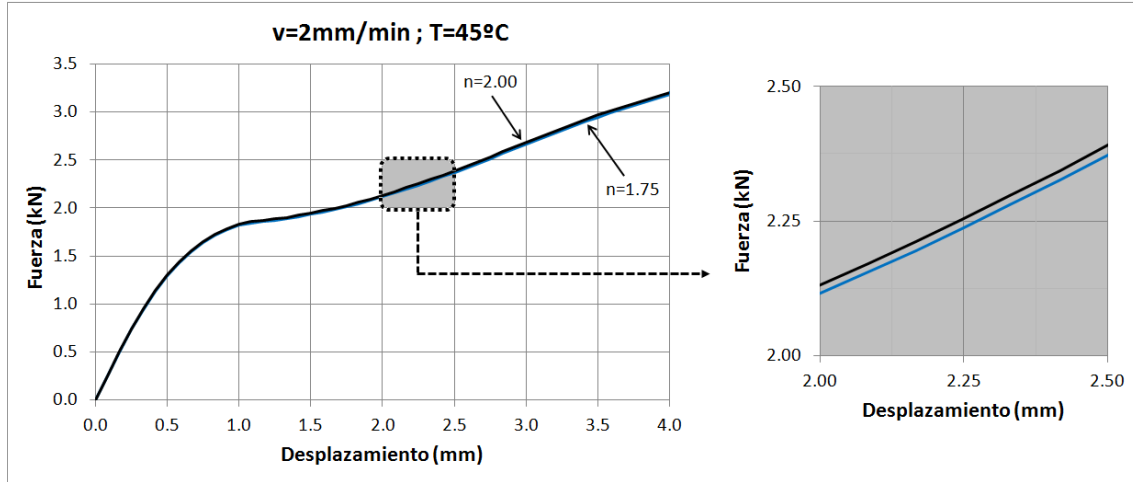


Figura 5.16: Curvas fuerza-desplazamiento para 2 mm/min y 45°C , considerando $n = 1,75$ y $n = 2,00$.

Por tanto, se concluye que los resultados obtenidos en los ensayos numéricos de compresión-cortadura no varían apreciablemente con n , en el entorno de $n = 1,85$, valor obtenido de la calibración de dicho parámetro. De esta manera, puede considerarse como desacoplado el ajuste de N respecto a dicha calibración, como era de esperar, ya que en los ensayos de compresión cortadura la tensión hidrostática en la región que presenta deformación plástica es prácticamente inapreciable.

5.4. Validación global del modelo

Los ensayos Flexión en Tres Puntos del Capítulo 4 se llevaron a cabo con la finalidad de validar el modelo propuesto, que ha sido calibrado

previamente obteniendo $n = 1,85$ y $N = 1$. A continuación se desarrollan las simulaciones numéricas necesarias para realizar dicha validación.

5.4.1. Modelo numérico

Se han llevado a cabo simulaciones en ABAQUS con el objetivo de implementar el modelo numérico y comparar sus resultados con los experimentales correspondientes. Las geometrías de probeta son las utilizadas en los ensayos de Flexión en Tres Puntos: la longitud de las probetas es 100 mm , la distancia entre apoyos utilizada es 80 mm , el canto es 20 mm y los posibles espesores 10 y 20 mm . Se ha tenido en cuenta la simetría del problema, modelizando $1/4$ de la probeta en el caso de orificio centrado y $1/2$ cuando éste no lo está.

La Figura 5.17 muestra las condiciones de contorno y el mallado utilizados en las probetas con orificio lateral, siendo similar para el caso de orificio centrado.

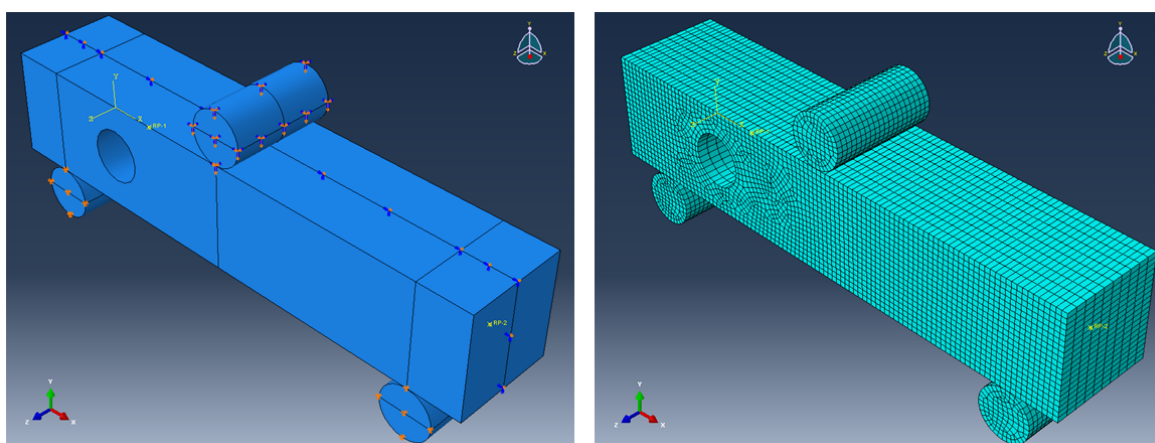


Figura 5.17: Condiciones de contorno y mallado utilizados en las simulaciones de Flexión en Tres Puntos ($e = 20\text{ mm}$).

En el mallado se utilizan elementos C3D8H de 8 nodos con integración híbrida, siendo su tamaño característico $0,5 \text{ mm}$. El desplazamiento vertical es aplicado a la probeta a velocidad constante mediante un cilindro de acero de 10 mm de diámetro, que se ha modelizado como material elástico y lineal con módulo de Young 210 GPa y coeficiente de Poisson $0,3$. Los apoyos inferiores han sido igualmente modelizados como cilindros de acero.

Cabe destacar que se ha comprobado numéricamente que en la probeta no se supera en ningún caso la velocidad de deformación de $0,1 \text{ s}^{-1}$, por tanto no se ha considerado incremento térmico por deformación plástica.

Se han tenido en cuenta 2 modelos constitutivos diferentes para el comportamiento del PMMA:

Modelo (a): modelo que considera todas las ecuaciones planteadas en el Capítulo 3, con valores $n = 1,85$ y $N = 1$ en el criterio de plastificación, obtenidos de la calibración.

$$\phi = \psi \left) \frac{\nabla \sqrt{3J_2}}{\sigma_t} \left[\right]^{1,85} + \frac{m^{1,85}}{m+1} \frac{1}{\sigma_t} \frac{I_1}{\sigma_t} - \frac{m}{m+1} \frac{m^{0,85} + 1}{\sigma_t} \quad (5.11)$$

con

$$\psi = \frac{8}{7} \left) \frac{27}{32} \frac{J_3^2}{J_2^3} \left[\quad (5.12)$$

Las propiedades físicas del PMMA tienen los mismos valores utilizados en secciones anteriores, y no se tiene en cuenta calentamiento por deformación plástica.

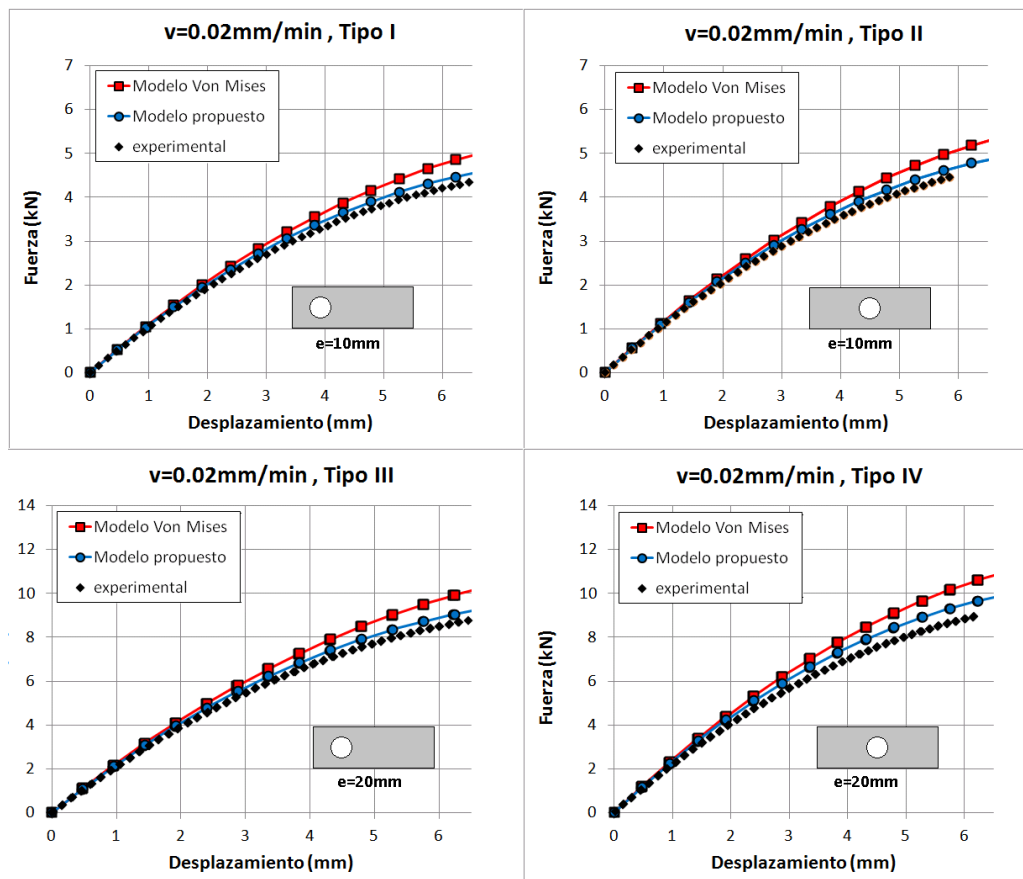
Modelo (b): para analizar la mejoría del modelo propuesto, se ha utilizado como referencia un segundo modelo que no tiene en cuenta las influencias de I_1 y de J_3 , cuyo criterio de plastificación supone una generalización del criterio de Von Mises tradicional, siendo aplicable a materiales con distinto comportamiento a tracción y a compresión, y que recoge la influencia de la temperatura y la velocidad de deformación:

$$\sqrt{3J_2} = \begin{cases} \sigma_t(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta) & \text{si } I_1 > 0 \\ \frac{1}{2}(\sigma_t(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta) + \sigma_c(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta)) & \text{si } I_1 = 0 \\ \sigma_c(\bar{\epsilon}^p, \dot{\bar{\epsilon}}^p, \theta) & \text{si } I_1 < 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

Las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas con ambos modelos se compararán con las correspondientes experimentales.

5.4.2. Comparación de resultados numéricos y experimentales

Las Figuras 5.18-5.20 muestran una comparativa de las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas experimentalmente con las calculadas numéricamente por los **modelos (a) y (b)**, para los tipos de probeta utilizados y para distintas velocidades de aplicación del desplazamiento (Tabla 4.8):

Figura 5.18: Curvas fuerza-desplazamiento para la velocidad 0.02mm/min

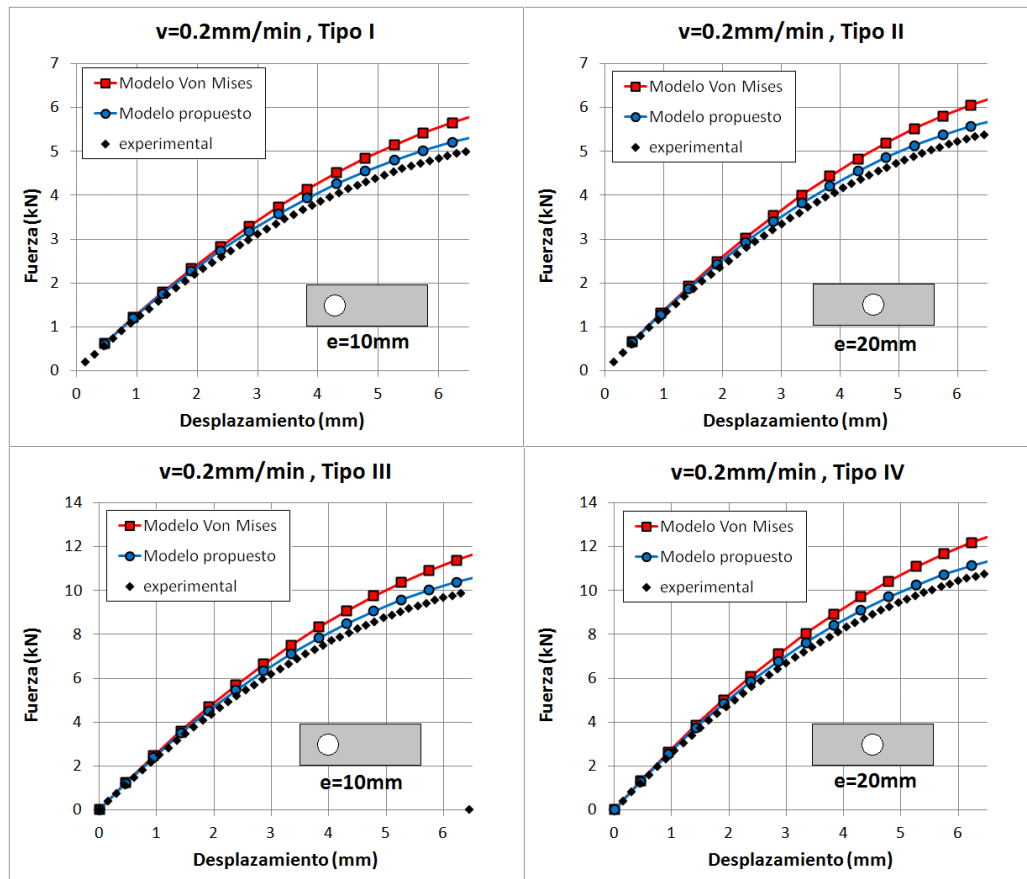


Figura 5.19: Curvas fuerza-desplazamiento para la velocidad $0,2\text{mm/min}$

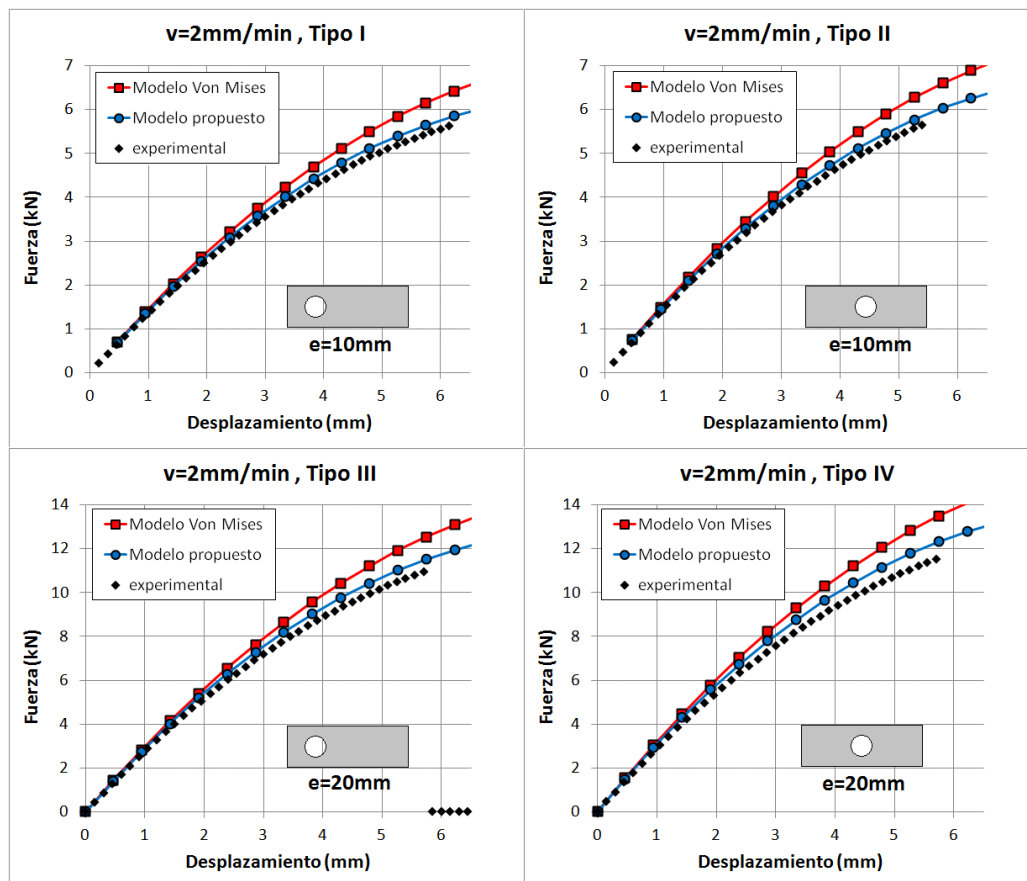


Figura 5.20: Curvas fuerza-desplazamiento para la velocidad 2mm/min

Se puede observar que los resultados del modelo propuesto mejoran las predicciones hechas por el criterio de Von Mises modificado en todos los casos estudiados. En particular, se observan diferencias menores del 10 % entre la curva experimental y la correspondiente al modelo de comportamiento propuesto, mientras que los errores obtenidos con la curva del modelo de Von Mises modificado eran próximos al 20 %.

5.4.3. Influencia del espesor

Como se mencionó anteriormente, el modelo numérico desarrollado en la presente Tesis ha sido implementado mediante una subrutina de usuario de tipo UMAT, con la finalidad de aplicarlo en el Método de los Elementos Finitos que incorpora ABAQUS. Es de vital importancia tener presente que la subrutina requiere conocer el tipo de problema que se quiere resolver, desde el punto de vista de si se trata de un modelo unidimensional, bidimensional o tridimensional. A este respecto, el modelo desarrollado en el Capítulo 3 puede ser implementado en cualquiera de los supuestos anteriores.

Como se mostró en el presente Capítulo, las simulaciones de los ensayos de compresión confinada fueron realizadas con un modelo axilsimétrico, mientras que los de compresión-cortadura y de Flexión en Tres puntos se implementaron en un modelo tridimensional. Es importante recalcar que es habitual resolver determinados problemas tridimensionales mediante modelos 2D, simplificación que generalmente induce la pérdida la información relevante a lo largo espesor del sólido objeto de estudio, si bien es cierto que en muchos casos dicha aproximación proporciona resultados aceptables invirtiendo un tiempo computacional sensiblemente inferior.

Para analizar si el modelo propuesto recoge estos aspectos, a continuación se muestran varios análisis en este sentido.

5.4.3.1. Variación de la presión hidrostática a lo largo del espesor

La Figura 5.21 muestra la variación de la presión hidrostática en distintos planos del espesor de la probeta, para la velocidad $0,02 \text{ mm/min}$ y la probeta tipo III (orificio lateral y espesor 20 mm), para un desplazamiento vertical de referencia de valor 5 mm . Los planos considerados son los correspondientes al plano de simetría ($z = 0$), a un plano intermedio ($z = e/4$) y a la superficie libre ($z = e/2$).

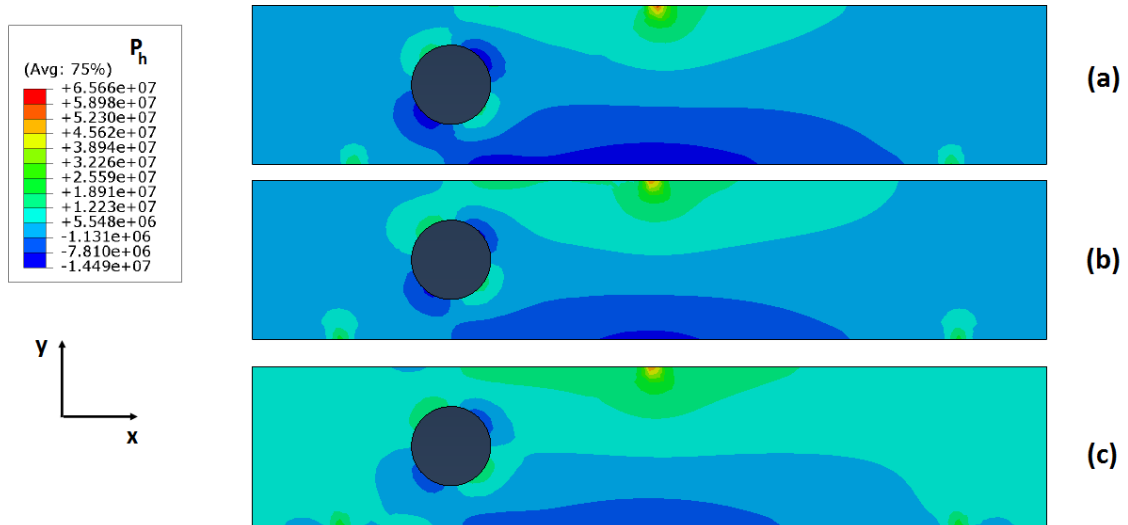


Figura 5.21: Variación de la presión hidrostática a lo largo del espesor: (a) $z = 0$, (b) $z = e/4$, (c) $z = e/2$.

Se observa una distribución diferente en las tres secciones consideradas. La evolución de los resultados en los distintos planos del espesor destaca el carácter tridimensional del problema analizado.

5.4.3.2. Distribución tensional a lo largo del espesor

En las Figuras 5.22-5.24 se muestra, para un desplazamiento de 5 mm , la distribución de tensiones normales σ_x , σ_y y σ_z a lo largo del espesor, para la probeta Tipo IV con orificio centrado y espesor 20 mm , y para la velocidad de $0,02\text{ mm/min}$.

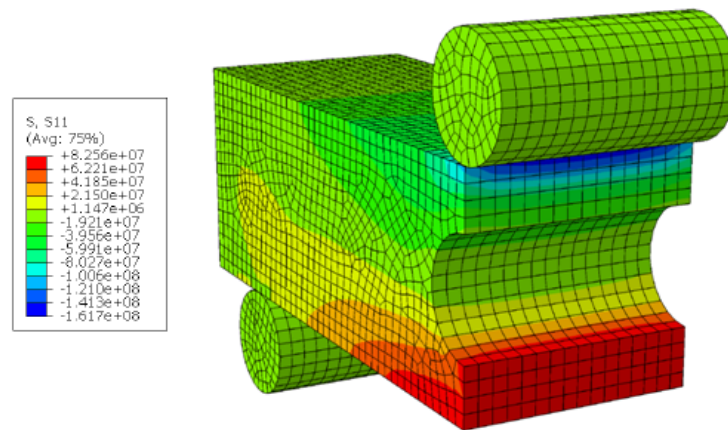


Figura 5.22: Distribución de tensiones según la dirección longitudinal, σ_x .

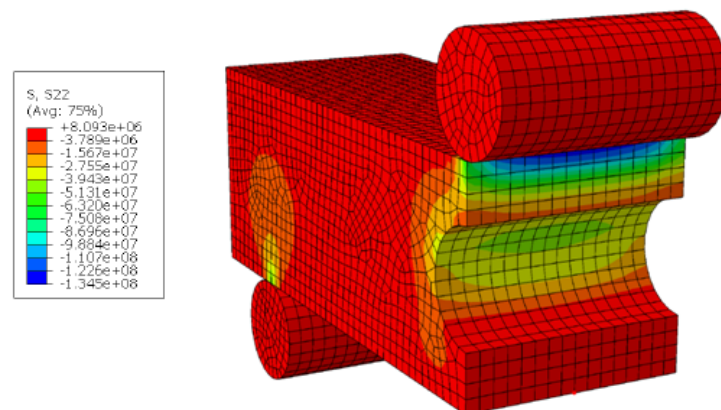


Figura 5.23: Distribución de tensiones según la dirección vertical, σ_y .

Se observa que las fibras inferiores de la probeta presentan un comportamiento a tracción, mientras que la región que soporta dicha carga se

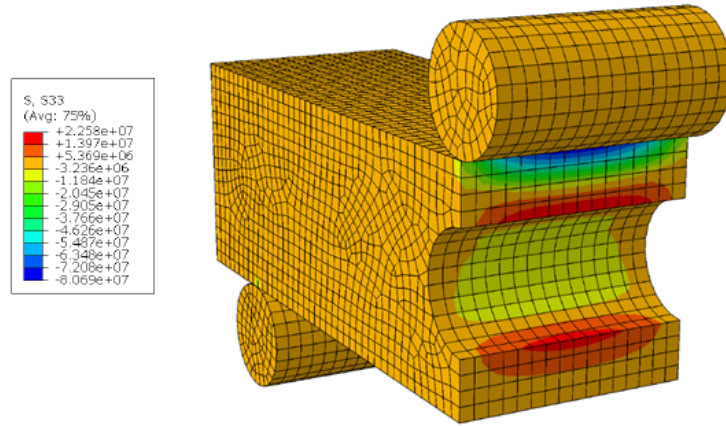


Figura 5.24: Distribución de tensiones según la dirección del espesor, σ_z .

encuentra a compresión, como era de esperar. Además, con respecto a la tensión en dirección del espesor, de comprueba que la superficie libre de la probeta se encuentra sometida a un comportamiento próximo a tensión plana, donde dicha tensión tiende a ser nula, mientras que en el interior de la probeta el comportamiento es próximo a deformación plana.

Se ha comprobado que las componentes tensionales analizadas presentan una distribución no uniforme a lo largo espesor de la probeta, por tanto se verifica de nuevo que el modelo numérico 3D utilizado reproduce las variaciones de propiedades a lo largo del espesor, en contraposición a los modelos 2D tradicionales.

5.4.3.3. Distribución de deformación plástica equivalente en la probeta

Se han realizado simulaciones numéricas adicionales para el caso de probeta con orificio pasante en el centro de la misma, para las cuales se han considerado distintos espesores comprendidos entre 5 y 20 *mm*. Se ha uti-

lizado una velocidad de aplicación de la carga de $0,2 \text{ mm/min}$, mientras que el tamaño característico de los elementos de la malla utilizada es $0,2 \text{ mm}$. En la Figura 5.25 se muestra la deformación plástica equivalente presente en la probeta.

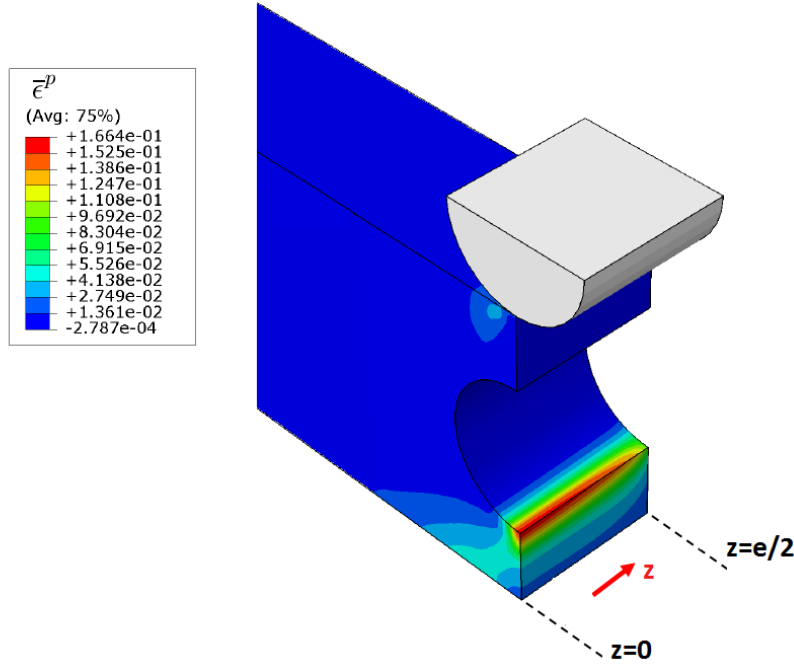


Figura 5.25: Distribución de deformación plástica equivalente en la probeta, $e = 20 \text{ mm}$, $d = 3 \text{ mm}$.

Se observa que la deformación plástica equivalente es superior en la superficie interior del orificio más alejada al punto de aplicación de la carga, así como una variación a lo largo del espesor de la probeta, observándose que ésta crece desde la superficie de la probeta (plano $z = e/2$) hasta el plano de simetría de la misma (plano $z = 0$).

Adicionalmente, se han llevado a cabo simulaciones bidimensionales que consideran tensión y deformación planas, con la finalidad de compararlas con las anteriores. Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 5.26, donde se representa cómo varía a lo largo del espesor la deformación plástica equivalente normalizada con la obtenida en deformación plana,

para la región descrita anteriormente.

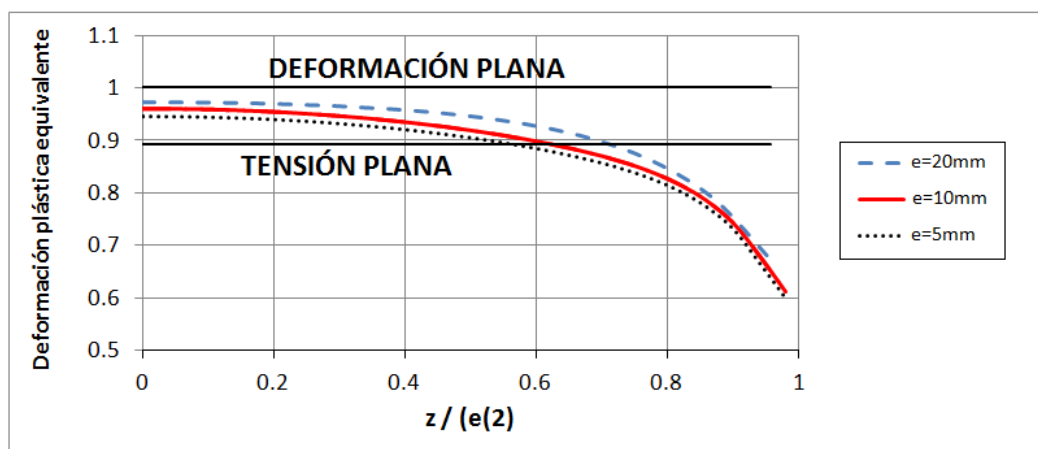


Figura 5.26: Distribución a lo largo del espesor, y en la zona de interés, de la deformación plástica equivalente normalizada.

La distribución de deformación plástica equivalente es similar para todos los espesores analizados, con menores diferencias en la zona central y mayores en la superficie libre de la probeta. Por tanto, de nuevo se pone de manifiesto la importancia de utilizar modelos 3D en determinados problemas de la mecánica de sólidos, frente a los modelos clásicos 2D, especialmente en sólidos con zonas que presentan concentradores de tensiones, como es el caso actual.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se presentan las conclusiones y los trabajos futuros de esta Tesis Doctoral.

6.1. Conclusiones

En esta Tesis Doctoral se ha desarrollado un modelo numérico que permite analizar el comportamiento termoviscoplastico de los polímeros. Este modelo incorpora los invariantes I_1 , J_2 y J_3 , además de recoger la posible diferencia entre el comportamiento a tracción y compresión, la influencia de la velocidad de deformación y de la temperatura.

El modelo de comportamiento ha sido implementado en un código comercial de Elementos Finitos, mediante un procedimiento de integración implícita de las ecuaciones, con la finalidad de comparar las predicciones numéricas con resultados experimentales. El modelo ha sido aplicado mediante una subrutina de usuario de tipo UMAT, que puede ser utilizada en problemas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales.

Para la calibración y validación del modelo, se ha utilizado PMMA como material de referencia, que ha sido previamente caracterizado a tracción y a compresión uniaxial.

Se ha ajustado el parámetro n mediante ensayos de compresión confinada a distintas temperaturas y velocidades de deformación, en probetas cilíndricas de PMMA que ven restringido su movimiento radial debido a un alojamiento de acero de alta resistencia, de tipo 42CrMo4. Se ha concluido que en todos los casos la predicción numérica para un valor $n = 2$ presenta un error menor que $n = 1$ respecto a la obtenida experimentalmente, afirmación que se corresponde con la que realiza Ghorbel en su trabajo. Se ha calibrado el modelo numérico, ajustando el parámetro n tal que la predicción se corresponde con el resultado experimental, obteniendo un valor $n = 1,85$ que produce una desviación máxima de un

3 %, aproximadamente. Se ha comprobado que el parámetro N no afecta al comportamiento del material en compresión confinada, por tanto la calibración de n no se ve afectada por este parámetro.

Por otra parte, se ha estudiado el efecto del parámetro de Lode, o equivalentemente J_3 , en el comportamiento del PMMA, ajustando el parámetro N tal que se tiene en cuenta el invariante J_3 ($N = 1$) o se anulan sus efectos ($N = 0$). Para ello, se han realizado ensayos de compresión-cortadura a diferentes temperaturas y velocidades de deformación, en probetas tipo SCS, comparando las curvas fuerza-desplazamientos experimentales con sus correspondientes predicciones numéricas. Se ha concluido que el modelo con invariante J_3 proporciona mejores resultados que si no se tiene en cuenta, siendo los errores menores del 10 % para el modelo de comportamiento propuesto, utilizando el valor $n = 1,85$ obtenido anteriormente. Por tanto, se establece $N = 1$.

Finalmente, se han realizado ensayos de Flexión en Tres Puntos en probetas con un orificio pasante en distintas posiciones, con la finalidad de validar el modelo y comprobar que mejora las predicciones respecto a un modelo de Von Mises que tiene en cuenta la influencia de la temperatura, la velocidad de deformación y las diferencias entre tracción y compresión. Se observan diferencias menores del 10 % entre la curva experimental y la correspondiente al modelo numérico, mientras que los errores obtenidos con la curva del modelo de comportamiento de Von Mises eran próximos al 20 %, confirmando que el nuevo modelo genera mejores resultados en sus predicciones. Además, se ha analizado cómo influye el espesor de la probeta en los resultados obtenidos, respecto a una posible modelización 2D, poniéndose de manifiesto la importancia de utilizar modelos 3D en determinados problemas de la mecánica de sólidos.

En todos los casos estudiados, una mayor velocidad de deformación o menor temperatura producen un mayor nivel tensional para una deformación dada, o equivalentemente, una mayor fuerza para un desplazamiento prefijado, hechos que se corresponden con los resultados extraídos de la caracterización del material, y con los encontrados en la literatura.

Por otra parte, se han comparado los resultados obtenidos teniendo en cuenta incremento de temperatura por deformación plástica, comprobando que, en los casos analizados, se mejora el resultado respecto a si no se tiene en cuenta este hecho.

6.2. Trabajos futuros

Algunas de las líneas de investigación que se pueden llevar a cabo a partir de esta Tesis Doctoral son las siguientes:

- Calibrar y validar el modelo de comportamiento desarrollado a otros polímeros termoplásticos, a través de ensayos experimentales similares a los realizados para el PMMA.
- Incorporar al modelo planteado fenómenos de daño, pudiendo ser éste aplicado a fenómenos de fractura con iniciación y crecimiento de fisuras en el material.
- Implementar otros modelos de comportamiento distintos al planteado, aplicables a otros materiales no necesariamente poliméricos, que puedan tener en cuenta también los invariantes tensionales I_1 , J_2 y J_3 , la temperatura y la velocidad de deformación, así como posibles diferencias entre los comportamientos a tracción y a compresión.

Bibliografía

- [1] Chen, W., Lu, F., Cheng, M., Tension and compression tests of two polymers under quasi-static and dynamic loading, *Polymer Testing*, 21 (2002), 113-121.
- [2] Nasraoui, N., Forquin, P., Siad, L., Rusinek, A., Influence of strain rate, temperature and adiabatic heating on the mechanical behaviour of polymethyl-methacrylate: Experimental and modelling analyses, *Materials & Design*, 37 (2012), 500-509.
- [3] Abaqus 6.9 User Documentation, Internet Manual, Simulia, 2011.
- [4] Beese, A.M., Mohr, D., Effect of stress triaxiality and Lode angle on the kinetics of strain-induced austenite-to-martensite transformation, *Acta Materialia*, 59 (2011), 2589-2600.
- [5] Keshavarz, A., Ghajar, R., Mirone, G., A new experimental failure model based on triaxiality factor and Lode angle for X-100 pipeline steel, *International Journal of Mechanical Sciences*, 80 (2014), 175-182.
- [6] [http : //www.g.eng.cam.ac.uk/125/now/mfs/tutorial/non_IE/charts.html](http://www.g.eng.cam.ac.uk/125/now/mfs/tutorial/non_IE/charts.html), Febrero de 2014.
- [7] Billmeyer Jr., Fred W., *Ciencia de los Polímeros*, Barcelona (España), Reverté, 2004.

- [8] Callister, W.D., *Introducción a la Ciencia e Ingeniería de los Materiales*, Barcelona (España), Ed. Reverté, 1996.
- [9] Sperling, L.H., *Introduction to Physical Polymer Science*, Wiley, 2006.
- [10] Richeton, J., Ahzi, S., Vecchio, K.S., Jiang F.C., Adharapurapu, R.R., Modeling and validation of the large deformation inelastic response of amorphous polymers over a wide range of temperatures and strain rates, *International Journal of Solids and Structures*, 44 (2007), 7938-7954.
- [11] Kendall, M.J., Siviour, C.R., Experimentally simulating adiabatic conditions: Approximating high rate polymer behavior using low rate experiments with temperature profiles, *Polymer*, 54 (2013), 5058-5063.
- [12] Gomez-del Río, T., Salazar, A., Rodríguez, J., Effect of strain rate and temperature on tensile properties of ethylene-propylene block copolymers, *Materials & Design*, 42 (2013), 301-307.
- [13] Richeton, J., Ahzi, S., Vecchio, K.S., Jiang, F.C., Makradi, A., Modeling and validation of the large inelastic response of amorphous polymers over a wide range of temperatures and strain rates, *International Journal of Solids and Structures*, 44 (2007), 7938-7954.
- [14] Eyring, H., Viscosity, plasticity and diffusion examples of absolute reaction rates, *Journal of Chemical Physics*, 4 (1936), 283-291.
- [15] Ward, I.M.; Hadley, D.W. *An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers*, 1993, Wiley, Chichester.
- [16] Chen, W., Lu, F., Cheng, M., Tension and compression tests of two polymers under quasistatic and dynamic loading, *Polymer Testing*, 21 (2002), 113-121.
- [17] Wu, H., Ma, G., Xia, Y., Experimental study of tensile properties of PMMA at intermediate strain rate, *Materials Letters*, 58 (2004), 3681-3685.

- [18] Ghorbel, E., A viscoplastic constitutive model for polymeric materials, *International Journal of Plasticity*, 24 (2008), 2032-2058.
- [19] R.M., Canddell, Raghava, R.S., Atkins, A.G., Pressure dependent yield criteria for polymers, *Materials Science and Engineering*, 13 (1974), 113-120.
- [20] Chen, W., Lu, F., Cheng, M., Tension and compression tests of two polymers under quasi-static and dynamic loading, *Polymer Testing*, 21 (2002), 113-121.
- [21] Vincent, M.C., Álvarez, S., Zaragoza, J.L., *Ciencia y Tecnología de Polímeros*, Valencia (España), Ed. Univ. Politécnica de Valencia, 2006.
- [22] Seymour, R.B., Carraher, C.E. Jr., *Polymer Chemistry*,
- [23] Kalpakjian, S., Schmid, S.R., *Manufactura, ingeniería y tecnología*, México, Pearson Educación, 2002.
- [24] Bardenhagen, S.G., Stout, M.G., Gray, G.T., Three-dimensional, finite deformation, viscoplastic constitutive models for polymeric materials, *Mechanics of Materials*, 25 (1997), 235-253.
- [25] Khan, A., Zhang, H., Finite deformation of a polymer: experiments and modeling, *International Journal of Plasticity*, 17 (2001), 1167-1188.
- [26] Galeski, A., Strength and toughness of crystalline polymer systems, *Progress in Polymer Science*, 28 (2003), 1643-1699.
- [27] Stachurski, Z.H., Deformation mechanisms and yield strength in amorphous polymers, *Progress in Polymer Science*, 22 (1997), 407-474.
- [28] Argon, A.S., A theory for the low-temperature plastic deformation of glassy polymers, *Philosophical Magazine*, 28 (1973), 839-865.
- [29] Meyer, R.W., Pruitt, L.A., The effect of cyclic true strain on the morphology, structure, and relaxation behavior of ultra high molecular weight polyethylene, *Polymer*, 42 (2001), 5293-5306.

- [30] Drucker, D.C., Prager, W., Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quarterly of Applied Mathematics*, 10 (1952), 157-165.
- [31] Lode dependences for isotropic pressure-sensitivity elastoplastic materials. (1990)
- [32] Menetrey, P., Wilam, K.J., Triaxial failure criterion for concrete and its generalization, *ACI Structural Journal*, 92 (1995), 311-318.
- [33] Bigoni, D., Piccolroaz, A., A new yield function for geomaterials, (2003)
- [34] Yang, Z., Elgamal, E., Multi-surface cyclic plasticity sand model with Lode angle effect, *Geotechnical and Geological Engineering*, 26 (2008), 335-348.
- [35] Influence of crack tip constraint on void growth in pressure sensitive plastic solids - I: 2D Analysis, *Engineering Fracture Mechanics*, 75 (2008), 1045-1063.
- [36] Guo, T.F., Faleskog, J., Shih, C.F., Continuum modeling of a porous solid with pressure-sensitivity dilatant matrix, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 (2008), 2188-2212.
- [37] Revil-Baular, B., Cazacu, O., Effect of stress triaxiality on porosity evolution in notched bars: Quantitative agreement between a recent dilatation model and X-ray tomography data, *Mechanics Research Communications*, 50 (2013), 77-82.
- [38] Ueber Kerbwirkungen bei Flusseisen (Ludwik et al) (1923).
- [39] Orowan, E., Notch brittleness and the strength of materials, Glasgow (Escocia), Ed. Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland, 1945.
- [40] Hancock J.W., Mackenzie, A.C., On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24 (1976), 147-160.

- [41] Hancock J.W., Brown, D.K., On the role of strain and stress state in ductile failure, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31 (1983), 1-24.
- [42] Spitzig, W.A., Sober, R.J., Richmond, O., Pressure dependence of yielding and associated volume expansion in tempered martensite, *Acta Metallurgica*, 23 (1975), 885-893.
- [43] Spitzig, W.A., Sober, R.J., Richmond, O., The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory, *Metallurgical Transactions A*, 7 (1976), 1703-1710.
- [44] Brünig, M., Numerical simulation of the large elastic-plastic deformation behavior of hydrostatic stress-sensitive solids, *International Journal of Plasticity*, 15 (1999), 1237-1264.
- [45] Holliday, L., Gunn, D.A., Pogany, G.A., Mann, J., Pugh, H.L.D., Ductility of polystyrene, *Nature*, 202 (1964), 381-382.
- [46] Mears, D.R., Pae, K.D., Sauer, J.A., Effects of hydrostatic pressure on the mechanical behavior of polyethylene and polypropylene, *Journal of Applied Physics*, 40 (1969), 4229-4237.
- [47] Ward, I.M., Review: the yield behaviour of polymers, *Journal of Materials Science*, 6 (1971), 1397-1417.
- [48] Sauer, J.A., Pae, K.D., The flow of solid polymers under high pressure, *Colloid & Polymer Science*, 252 (1974), 680-695.
- [49] Khan, A.S., Farrokh, B., Thermo-mechanical response of nylon 101 under uniaxial and multi-axial loadings: Part I, Experimental results over wide ranges of temperatures and strain rates, *International Journal of Plasticity*, 22 (2006), 1506-1529.

- [50] Rittel, D., Brill, A., Dynamic flow and failure of confined polymethylmethacrylate, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 (2008), 1401-1416.
- [51] Rittel, D., Dorogoy, A., A methodology to assess the rate and pressure sensitivity of polymers over a wide range of strain rates, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 (2008), 3191-3205.
- [52] Bowden, P.B., Jukes, J.A., The plastic flow of isotropic polymers, *Journal of Materials Science*, 7 (1972), 52-63.
- [53] Raghava, R., Caddell, R.M., Yeh, G.S.Y., The macroscopic yield behaviour of polymers, *Journal of Materials Science*, 8 (1973), 225-232.
- [54] Mirone, Role of stress triaxiality in elastoplastic characterization and ductile failure prediction, *Engineering Fracture Mechanics*, 74 (2007), 1203-1221.
- [55] Castagnet, S., Deburck, Y., Relative influence of microstructure and macroscopic triaxiality on cavitation damage in a semi-crystalline polymer, *Materials Science and Engineering A*, 448 (2007), 56-66.
- [56] Rittel, D., Brill, A., Dynamic flow and failure of confined polymethylmethacrylate, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 (2008), 1401-1416.
- [57] Kolsky, H., An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading, *Proceedings of the Physical Society B.*, 62 (1949), 676-700.
- [58] Gómez-del Río, T., Barbero, E., Zaera, R., Navarro, C., Dynamic tensile behaviour at low temperature of CFRP using a split Hopkinson pressure bar, *Composites Science and Technology*, 65 (2005), 61-71.
- [59] Ramesh, K., Seshu, D.R., Prabhakar, M., Constitutive behaviour of confined fibre reinforced concrete under axial compression, *Cement and Concrete Composites*, 25 (2003), 343-350.

- [60] Forquin, P., Arias, A., Zaera, R., An experimental method of measuring the confined compression strength of geomaterials, *International Journal of Solids and Structures*, 44 (2007), 4291-4317.
- [61] Han, L.H., Liu, W., Yang, Y.F., Behavior of thin walled steel tube confined concrete stub columns subjected to axial local compression, *Thin-Walled Structures*, 46 (2008), 155-164.
- [62] Driemeier, L., Brunig, M., Micheli, G., Alves, M., Experiments on stress-triaxiality dependence of material behavior of aluminum alloys, *Mechanics of Materials*, 42 (2010), 207-217.
- [63] Boisot, G., Laiarinandrasana, L., Besson, J., Fond, C., Hochstetter, G., Experimental investigations and modeling of volume change induced by void growth in polyamide 11, *International Journal of Solids and Structures*, 48 (2011), 2642-2654.
- [64] Brünig, M., Berger, S., Obrecht, H., Numerical simulation of the localization behavior of hydrostatic-stress-sensitive metals, *International Journal of Mechanical Sciences*, 42 (2000), 2147-2166.
- [65] Kuroda, M., A phenomenological plasticity model accounting for hydrostatic stress-sensitivity and vertex-type of effect, *Mechanics of Materials*, 36 (2004), 285-297.
- [66] Hu, W., Wang, Z.R., Multiple-factor dependence of the yielding behavior to isotropic ductile materials, *Computational Materials Science*, 32 (2005), 31-46.
- [67] Cazacu, O., Barlat, F., Application of the theory of representation to describe yielding of anisotropic aluminium alloys, *International Journal of Engineering Science*, 41 (2003), 1367-1385.
- [68] Soare, S., Yoon, J.W., Cazacu, O., Barlat, F., Applications of a recently proposed anisotropic yield function to sheet forming, *Advanced Methods in Material Forming*, XX (2007), 131-149.

- [69] Bai, Y., Wierzbicki, T., A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, *International Journal of Plasticity*, 24 (2008), 1071-1096.
- [70] Lee, Y.K., Ghosh, J., The significance of J_3 to the prediction of shear bands, *International Journal of Plasticity*, 12 (1996), 1179-1197.
- [71] Rittel, D., Ravichandran, G., Lee, S., Large strain constitutive behavior of OFHC copper over a wide range of strain rates using the shear compression specimen, *Mechanics of Materials*, 34 (2002), 627-642.
- [72] Ames, M., Markmann, J., Birringer, R., Mechanical testing via dominant shear deformation of small-sized specimen, *Materials Science and Engineering A*, 528 (2010), 526-532.
- [73] Yin, Q., Zillmann, B., Suttner, S., Gerstein, G., Biasutti, M., Tekkaya, A.E., Wagner, M.F.-X., Merklein, M., Schaper, M., Hallem T., Brosius, A., An experimental and numerical investigation of different shear test configurations for sheet metal characterization, *International Journal of Solids and Structures*, 51 (2014), 1066-1074.
- [74] Merklein, M., Biasutti, M., Forward and reversible simple shear test experiments for material modeling in forming simulations. *International Conference on Technology of Plasticity*, Aachen (Germany), 702-707.
- [75] Brooks, N.W.J., Duckett, R.A., Ward, I.M., Temperature and strain-rate dependence of yield stress of polyethylene, *Journal of Polymer Science B Polymer Physics*, 36 (1998), 2177-2189.
- [76] Dasari, A., Misra, R.D.K., On the strain-rate sensitivity of high density polyethylene and polypropylenes, *Materials Science and Engineering A*, 358 (2003), 356-371.
- [77] Sardar, D., Radcliffe, S.V., Baer, E., Effects of high hydrostatic pressure on the mechanical behavior of a crystalline polymer polyoxymethylene, *Polymer Engineering & Science*, 8 (1968), 290-301.

- [78] R.A. Duckett, Rabinowitz, S., Ward, I.M., The strain-rate, temperature and pressure dependence of yield of isotropic poly(methylmethacrylate) and poly(ethylene terephthalate), *Journal of Materials Science*, 5 (1970), 909-915.
- [79] Harris, J.S., Ward, I.M., Parry, J.S.C., Shear strength of polymers under hydrostatic pressure: surface coatings prevent premature fracture, *Journal of Materials Science*, 6 (1971), 110-114.
- [80] Escaig, B., A physical model of the pressure dependence and biaxial mechanical properties of solid polymers, *Polymer Engineering & Science*, 37 (1997), 1641-1654.
- [81] Lesser, A.J., Kody, R.S., A generalized model for the yield behavior of epoxy networks in multiaxial stress states, *Journal of Polymer Science B Polymer Physics*, 35 (1997), 1611-1619.
- [82] Rittel, D., On the conversion of plastic work to heat during high strain rate deformation of glassy polymers, *Mechanics of Materials*, 31 (1999), 131-139.
- [83] Zaera, R., Rodriguez-Martinez, J.A., Rittel, D., On the Taylor-Quinney coefficient in dynamically phase transforming materials. Application to 304 stainless steel, *International Journal of Plasticity*, 40 (2013), 185-201.
- [84] Nasraoui, M., Forquin, P., Siad, L., Rusinek, A., Influence of strain rate, temperature and adiabatic heating on the mechanical behaviour of poly-methyl-methacrylate: Experimental and modelling analyses, *Materials & Design*, 37 (2012), 500-509.
- [85] Rajasekaran, S., *Numerical Methods in Science and Engineering: A Practical Approach*, India, Ed. S. Chand and Company, 2003.
- [86] *Nonlinear Finite Element Methods*, Wriggers, P., Ed. Springer, 2008.

- [87] Wilkins, M. L., Calculation of elastic-plastic flow, In *Methods in Computational Physics*, Ed. Academic Press, New York and London, 211-262, 1964.
- [88] KRIEG, R. D. and Key, S. (1976). Implementation of a time dependent plasticity theory into structural computer programs. Constitutive equations in viscoplasticity: Computational and engineering aspects, Editors J. A. Stricklin and K. J. Saczalski, AMD-20, ASME, New York. In: *Methods of Computational Physics*. Editors B. Alder et al., Academic Press, New York.
- [89] Simo, J., Taylor, R., Consistent tangent operators for rate dependent elasto-plasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48 (1985), 101-118.
- [90] Hughes, T., Taylor, R., Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/viscoplastic finite element analysis, *Computers and Structures*, 8 (1978), 169-173.
- [91] Nagtegaal, J.C., On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33 (1982), 469-484.
- [92] Wang, X., Wang, L.B., Xu, L.M., Formulation of the return mapping algorithm for elastoplastic soil models, *Computers and Structures*, 31 (2004), 315-338.
- [93] Kumar, P., Nukala, V.V., A return mapping algorithm for cyclic viscoplastic constitutive models, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (2006), 148-178.
- [94] Vadillo, G., Zaera, R., Fernández-Sáez, J., Consistent integration of the constitutive equations of Gurson materials under adiabatic conditions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 (2008), 1280-1295.

- [95] Peng, Q., Chen, M.X., An efficient return mapping algorithm for general isotropic elastoplasticity in principal space, *Computers and Structures*, 92-93 (2012), 173-184.
- [96] Hofmeister, L.D., Greenbaum, G.A., Evensen, D.A., Large Strain, Elasto-Plastic Finite Element Analysis, *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 9 (1971), 1248-1254.
- [97] Diaz Moreno, J.M., Benitez Trujillo, F., Introducción a los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones, Cap. 3, Cadiz (España), Ed. Servicio de Publicaciones Universidad de Cadiz, 1998.
- [98] Cramer, G., Introduction à l'Analyse des lignes Courbes algébriques, Geneva: Europeana, 656-659 (1750).
- [99] Abaqus/Standard 6.9 User's Manual, Internet Manual, Simulia, 2011.
- [100] Brandrup, J., Immergut, E.H., *Polymer Handbook*, New York (EE.UU.), Wiley, 1989.
- [101] <http://www.matbase.com/material-categories/natural-and-synthetic-polymers/commodity-polymers/material-properties-of-polymethyl-methacrylate-extruded-acrylic-pmma.html#properties>, febrero de 2014.
- [102] Li, Z., Lambros, J., Strain rate effects of the thermomechanical behavior of polymers, *International Journal of Solids and Structures*, 38 (2001), 3549-3562.
- [103] Mulliken, A.D., Boyce, M.C., Mechanics of the rate-dependent elastic-plastic deformation of glassy polymers from low to high strain rates, *International Journal of Solids and Structures*, 43 (2006), 1331-1356.
- [104] Arruda, E.M., Boyce, M.C., Jayachandran, R., Effects of strain rate, temperature and thermomechanical coupling on the finite strain deformation of glassy polymers, *Mechanics of Materials*, 19 (1995), 193-212.

- [105] Forquin, P., Nasraoui, M., Rusinek, A., Siad, L., Experimental study of the confined behaviour of PMMA under quasi-static and dynamic loadings, *International Journal of Impact Engineering*, 40-41 (2012), 46-57.
- [106] Terres, M.A., Ben Mohamed, S., Sidhom, H., Influence of ion nitriding on fatigue strength of low-alloy (42CrMo4) steel: Experimental characterization and predictive approach, *International Journal of Fatigue*, 32 (2010), 1795-1804.